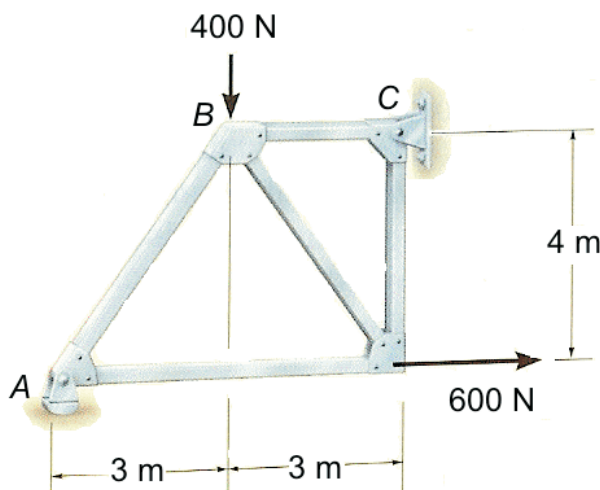


Χίος, 17 Ιουνίου 2011
Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Θέμα 1° (25 βαθμοί)

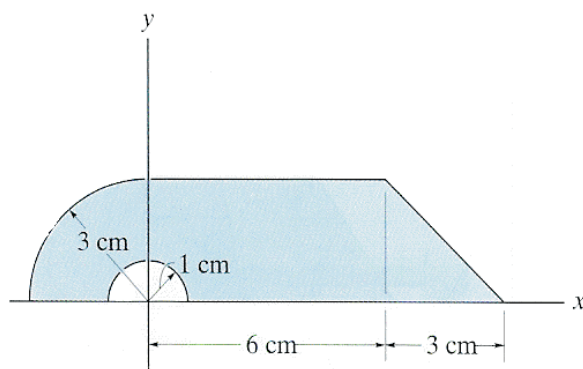
Να καθοριστούν οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στις ράβδους του δικτύματος του Σχήματος 1. Να επισημανθεί για την εκάστοτε ράβδο εάν φορτίζεται σε θλίψη ή εφελκυσμό. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των κόμβων.



Σχήμα 1: Το δίκτυμα του 1ου θέματος.

Θέμα 2° (20 βαθμοί)

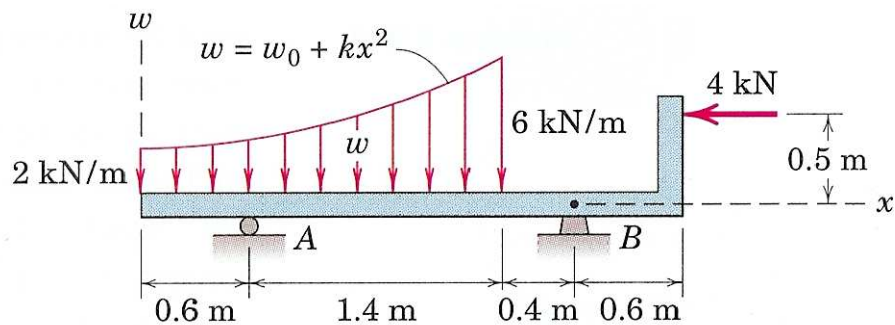
Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες $(\bar{x}, \bar{y})$ του κέντρου επιφανείας του γραμμοσκιασμένου τμήματος της διατομής του Σχήματος 2.



Σχήμα 2: Η γραμμοσκιασμένη διατομή του 2ου θέματος.

Θέμα 3° (25 βαθμοί)

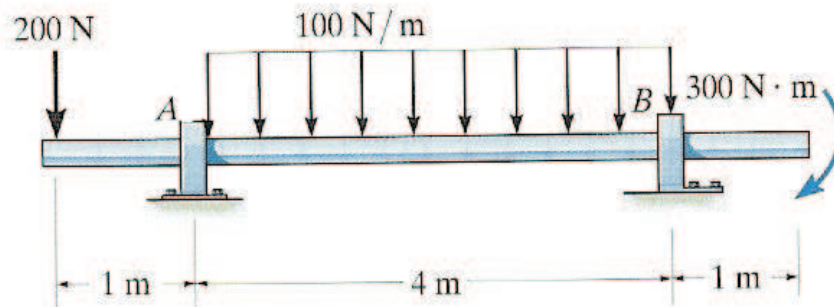
Να καθοριστούν οι αντιδράσεις στήριξης της δοκού στα σημεία A και B του Σχήματος 3 που φορτίζεται από την συγκεντρωμένη και κατανεμημένη δύναμη, αντίστοιχα.



Σχήμα 3: Η φορτιζόμενη δοκός του 3ου θέματος.

Θέμα 4° (30 βαθμοί)

Να κατασκευαστούν τα διαγράμματα διατμητικών δυνάμεων και καμπτικών ροπών για τον άξονα του Σχήματος 4. Η στήριξη στο σημείο A είναι άρθρωση και στο σημείο B είναι κύλιση.



Σχήμα 4: Ο φορτιζόμενος άξονας του 4ου θέματος.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.

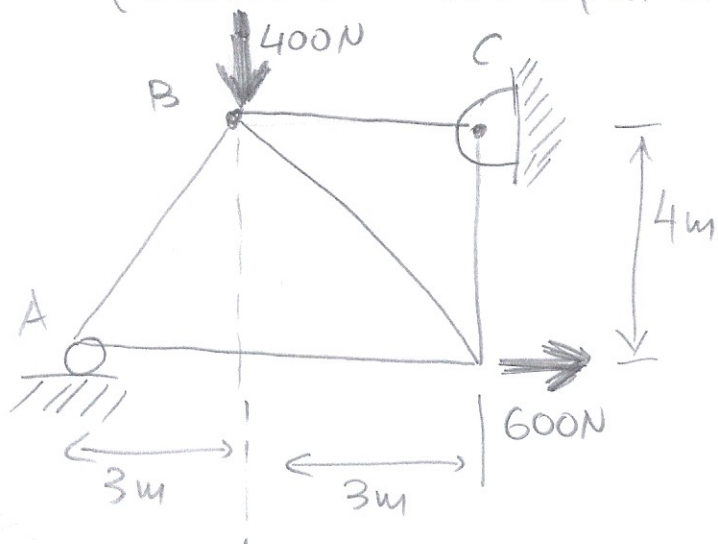
(Τα θέματα εξέτασης θα παραδίδονται μαζί με τις απαντήσεις)

Τυπολόγιο

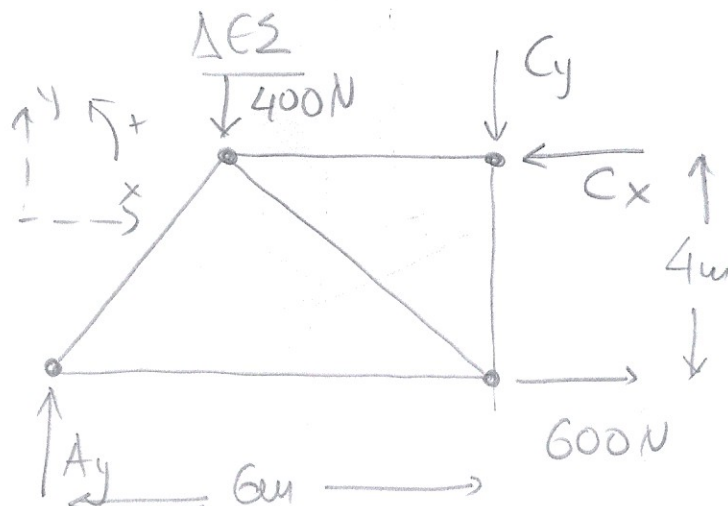
1. ροπή δύναμης $\vec{F}$, $M = \vec{r} \times \vec{F}$, όπου $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης
2. Σχέσεις μεταξύ q , N και M , $Q = \frac{dM}{dx}$, $\frac{dQ}{dx} = -q(x)$

ΘΕΜΑ 1^ο (25 βαθμοί)

Να υπολογιστούν οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στις ράβδους του δικτυώματος.



ΛΥΣΗ



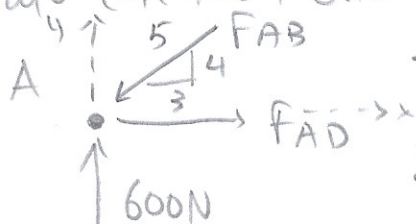
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 600\text{N} - C_x = 0 \Rightarrow C_x = 600\text{N}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -A_y \cdot (6\text{m}) + 400\text{N} \cdot (3\text{m}) + 600\text{N} \cdot (4\text{m}) = 0 \Rightarrow A_y = 600\text{N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 600\text{N} - 400\text{N} - C_y = 0 \Rightarrow C_y = 200\text{N}$$

Επιλέγουμε την επιλογή ενός των κόμβων Α.

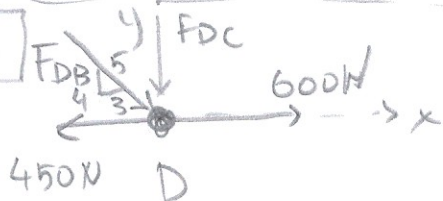
κόμβος Α



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 600 - \frac{4}{5} F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = 750\text{N} \text{ Θλίψη}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AD} - \frac{3}{5} (750\text{N}) = 0 \Rightarrow F_{AD} = 450\text{N} \text{ Έφελκ}$$

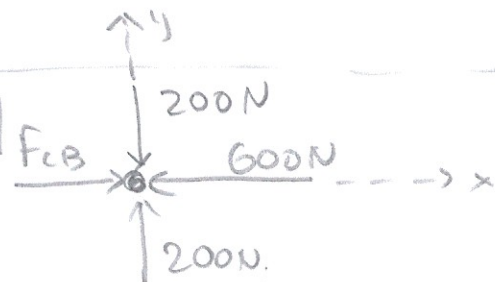
κόμβος D



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -450\text{N} + \frac{3}{5} F_{DB} + 600\text{N} = 0 \Rightarrow F_{DB} = -250\text{N} \text{ Έφελκ}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{DC} - \frac{4}{5} (-250\text{N}) = 0 \Rightarrow F_{DC} = 200\text{N} \text{ Θλίψη}$$

κόμβος C

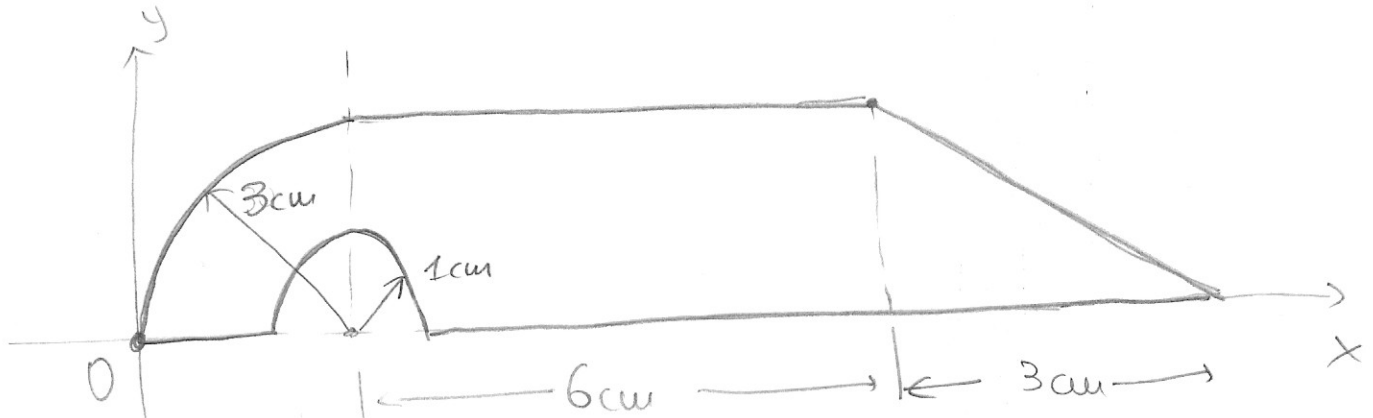


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CB} - 600\text{N} = 0 \Rightarrow F_{CB} = 600\text{N} \text{ Θλίψη}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 200\text{N} - 200\text{N} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ Έλεγχος OK.}$$

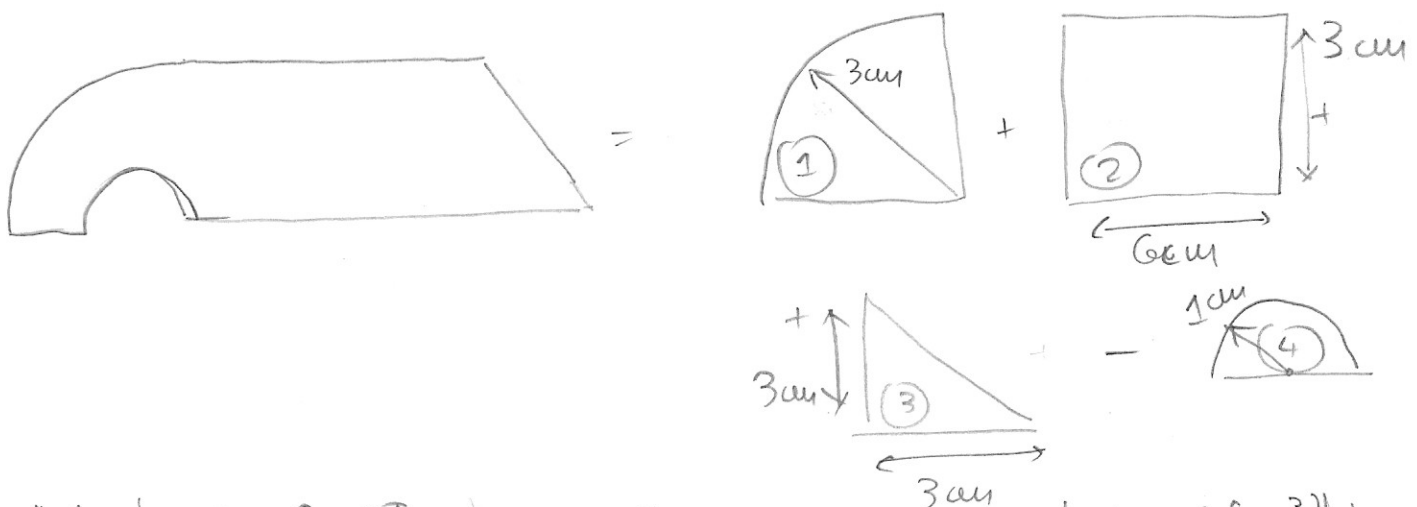
ΘΕΜΑ 2^ο (20 βαθμοί)

Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες $(\bar{x}, \bar{y})$ του κέντρου επιφάνειας του γραμμωκυστεύου υψίστατος της διατομής.



ΛΥΣΗ

Χαρίζω την επιφάνεια σε επιμέρους επιφάνειες 'εύκολης' γεωμετρίας.



A/A	$A_i \text{ [cm}^2\text{]}$	$x_i \text{ [cm]}$	$y_i \text{ [cm]}$	$A_i x_i \text{ [cm}^3\text{]}$	$A_i \cdot y_i \text{ [cm}^3\text{]}$
1	7,065	$\frac{5}{8} \cdot 3 = 1,875$	$\frac{2}{5} \cdot 3 = 1,2$	13,246	8,478
2	18,0	6,0	1,5	108,0	27,0
3	4,5	$3 + 6 + \frac{3}{3} = 10,0$	$\frac{1}{3} \cdot 3 = 1,0$	45,0	4,5
4	-1,57	3,0	$\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\pi} = 0,42$	-4,71	-0,667
				161,53	39,31

$$A = \sum A_i = 27,995$$

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i x_i}{A} = \frac{161,53 \text{ cm}^3}{27,995 \text{ cm}^2} \Rightarrow \bar{x} = 5,77 \text{ cm}$$

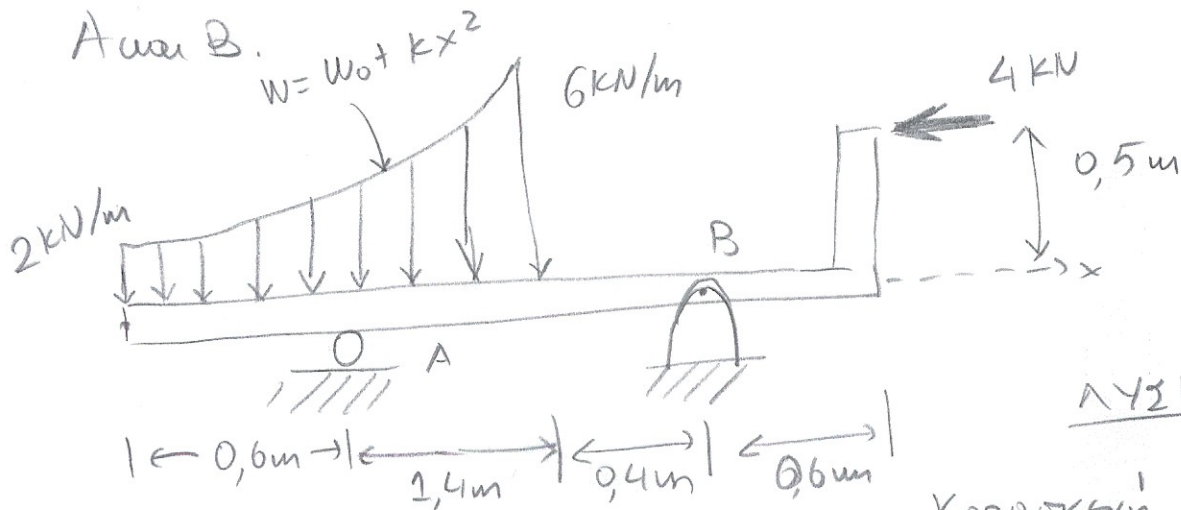
$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{A} = \frac{39,31 \text{ cm}^3}{27,995 \text{ cm}^2} \Rightarrow \bar{y} = 1,404 \text{ cm}$$

$$\boxed{\bar{x} = 5,77 \text{ cm}}$$

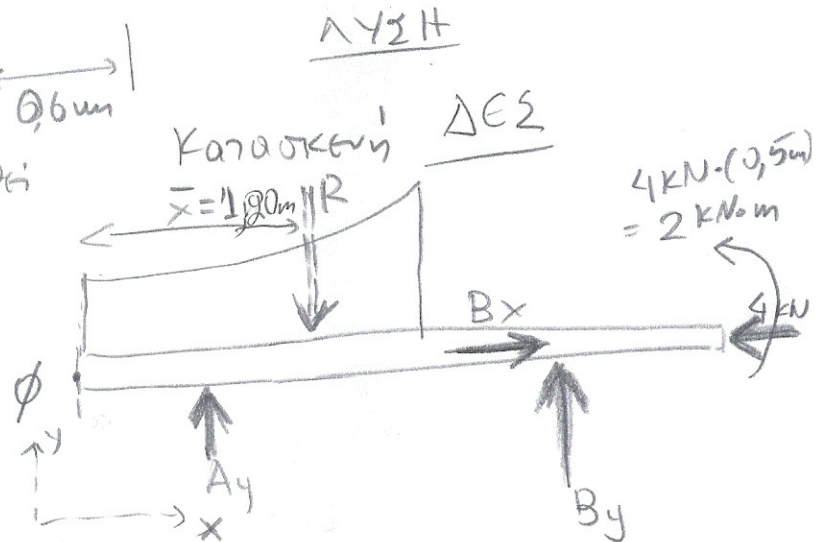
$$\boxed{\bar{y} = 1,404 \text{ cm}}$$

ΘΕΜΑ 3^ο 25 βαθμοί

Να υποδιοριστούν οι αντιδράσεις στηρίξης της δοκού στα σημεία Α και Β.



Η δύναμη 4 kN μπορεί να αντικατασταθεί με την δύναμη 4 kN στον άξονα των x και την ροπή των $2 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Η κατανευγμένη δύναμη μπορεί να αντικατασταθεί με τη συγκεντρωμένη δύναμη R .



Η εξίσωση του κατανευγμένου φορτίου είναι:

$w = w_0 + k \cdot x^2$. Αυτή έχει οριακές συνθήκες: (1) για $x = 0$, $w = 2 \text{ kN/m}$

(2) για $x = 2 \text{ m}$, $w = 6 \text{ kN/m}$

Από (1), (2) η εξίσωση γίνεται: $w = 2 + x^2$

Η συγκεντρωμένη δύναμη υπολογίζεται ως:

$$R = \int_0^{2\text{m}} (2 + x^2) \cdot dx = \left[2 \cdot x + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 6.66 \text{ kN} \Rightarrow R = 6.66 \text{ kN}$$

Το κέντρο της επιφάνειας του κατανευγμένου φορτίου υπολογίζεται ως:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^2 (2 + x^2) \cdot x \cdot dx}{\int_0^2 (2 + x^2) \cdot dx} = \frac{1}{6.66 \text{ kN}} \cdot \int_0^2 (2x + x^3) \cdot dx = \frac{1}{6.66} \left[x^2 + \frac{x^4}{4} \right]_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 1.2 \text{ m}$$

Ισορροπία στην δοκό:

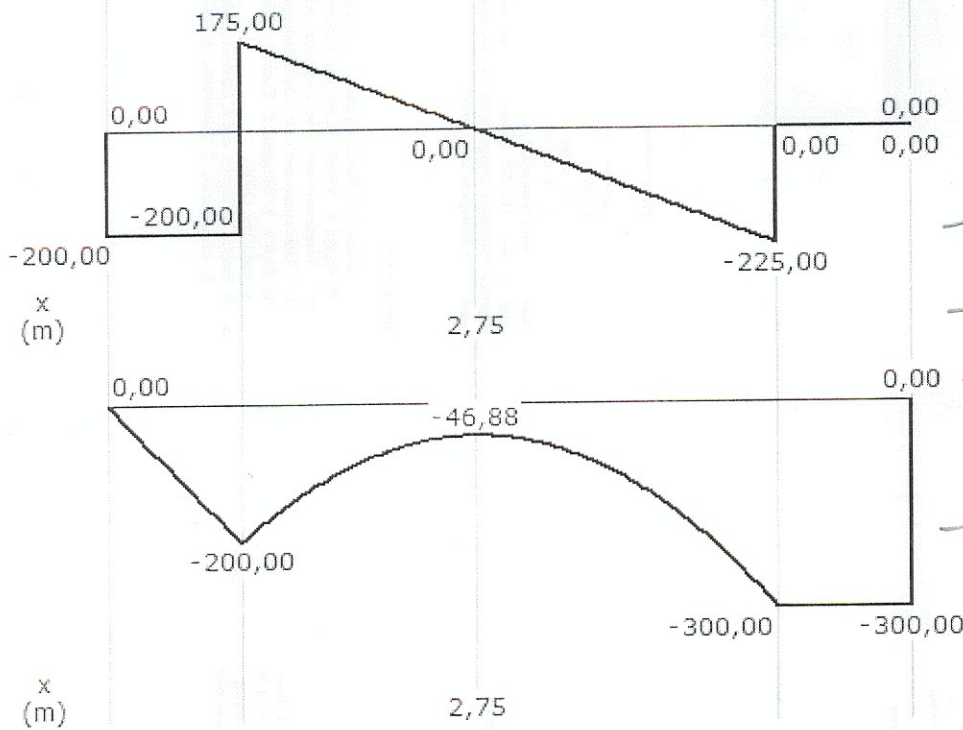
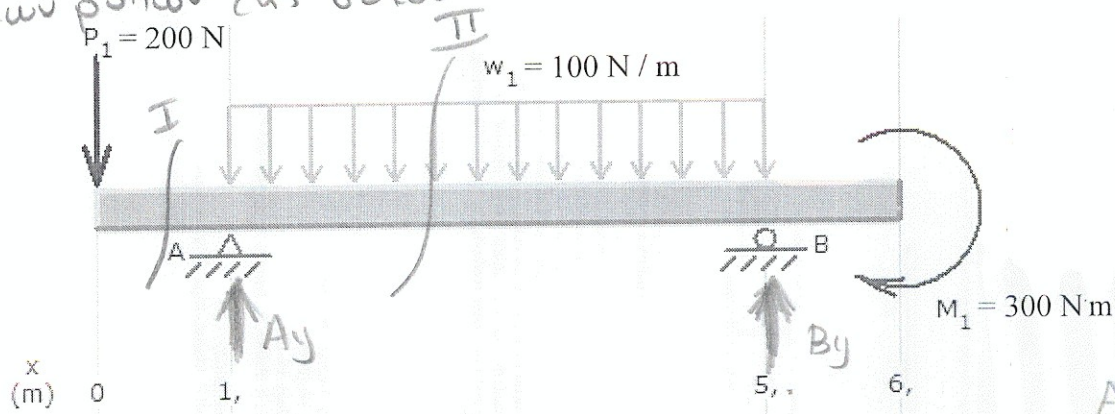
$$\sum \bar{F}_x = 0 \Rightarrow B_x - 4 \text{ kN} = 0 \Rightarrow B_x = 4 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_y (1.8 \text{ m}) - R (1.2 \text{ m}) - 2 \text{ kN}\cdot\text{m} = 0 \Rightarrow A_y = 5.55 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - R + B_y = 0 \Rightarrow B_y = 1.11 \text{ kN}$$

ΘΕΜΑ 4^ο (30 βαθμοί)

Να υπολογιστούν τα διαγράμματα διατμητικών δυνάμεων και καμπτικών ροπών της δοκού



Από το ΑΕΣ υπολογίζω τις αντιδράσεις:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$-P_1 \cdot (1\text{m}) + 400\text{N} \cdot (2\text{m}) -$$

$$-B_y \cdot (4\text{m}) + M_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_y = 225\text{N}$$

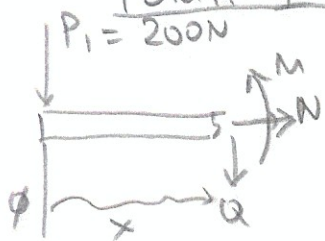
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$-200\text{N} + A_y - 400\text{N} + 225\text{N} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_y = 375\text{N}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο τμήματα:

ΤΟΜΗ Ι, $0 < x < 1\text{m}$

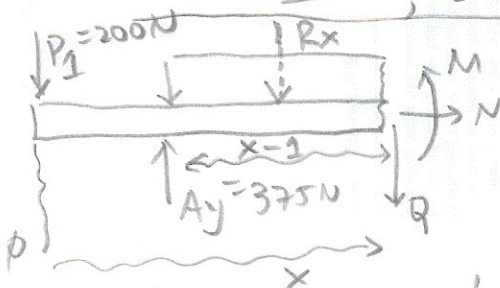


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q = -200\text{N}$$

$$\sum M_{\text{τομή}} = 0 \Rightarrow -M - 200\text{N} \cdot (x) = 0 \Rightarrow M = (-200 \cdot x)\text{N}\cdot\text{m}$$

ΤΟΜΗ ΙΙ, $1\text{m} < x < 5\text{m}$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P_1 + 375\text{N} - 100 \cdot (x-1) - Q = 0 \Rightarrow Q = (-100 \cdot x + 275)\text{N}$$

$$\sum M_{\text{τομή}} = 0 \Rightarrow -M - R_x \cdot (x-1) + 375\text{N} \cdot (x-1) - 200\text{N} \cdot (x) = 0 \Rightarrow$$

$$M = (-50x^2 - 75x + 325)\text{N}\cdot\text{m}$$

Η Τρίτη τμήτη μπορεί να αποφευχθεί: η δοκός είναι αβέβαιη από δύναμη και υπάρχει σταθερή αρνητική καμπτική ροπή.