

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ



ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 12:

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ – ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BODE

Δρ Γιώργος Μαϊστρος, Χημικός Μηχανικός



ΠΡΟΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

2

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 12 – Δρ. Γιώργος Μαϊστρος

- Απόκριση συχνότητας γραμμικών συστημάτων
- Διαγράμματα Bode
- Τυπικές μορφές διαγραμμάτων συναρτήσεων μεταφοράς
- Παραδείγματα - εφαρμογές



ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ

3

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 12 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

Γραφικές μέθοδοι ανάλυσης γραμμικών ΣΑΕ

1. Η μέθοδος του γεωμετρικού τόπου ριζών
2. Η αναπαράσταση συστημάτων μέσω των **διαγραμμάτων Bode**
3. Τα διαγράμματα **Nyquist**
4. Οι χάρτες Nichols

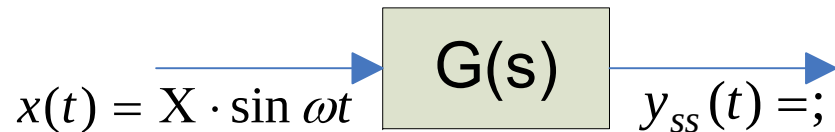
Οι 3 τελευταίες μέθοδοι αποτελούν τεχνικές που λαμβάνουν χώρα στο **πεδίο συχνότητας**



ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ - ΟΡΙΣΜΟΣ

4

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 12 – Δρ. Γιώργος Μαϊστρος



Ορισμός: **Απόκριση συχνότητας** είναι η απόκριση ενός συστήματος στην μόνιμη κατάσταση όταν αυτό διεγερθεί με ημιτονοειδή είσοδο.

Στην ανάλυση που ακολουθεί θεωρούμε μόνο γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα. Εξετάζουμε την ημιτονοειδή είσοδο διότι με το θεώρημα Fourier μπορούμε να αναλύσουμε οποιαδήποτε είσοδο σε άθροισμα ημιτονοειδών συναρτήσεων.

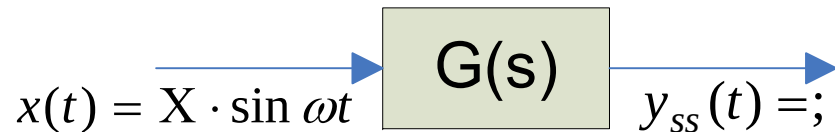
Θεώρημα απόκρισης συχνότητας: Τα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας συστήματος μπορούν να εξαχθούν απ' ευθείας από την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος G αντικαθιστώντας την μεταβλητή μετασχ/σμου Laplace (s) με την $j\omega$ (όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα σε rad/sec), δηλαδή μπορούν να εξαχθούν από την συνάρτηση $G(j\omega)$.



ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ – ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

5

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 12 – Δρ. Γιώργος Μαϊστρος



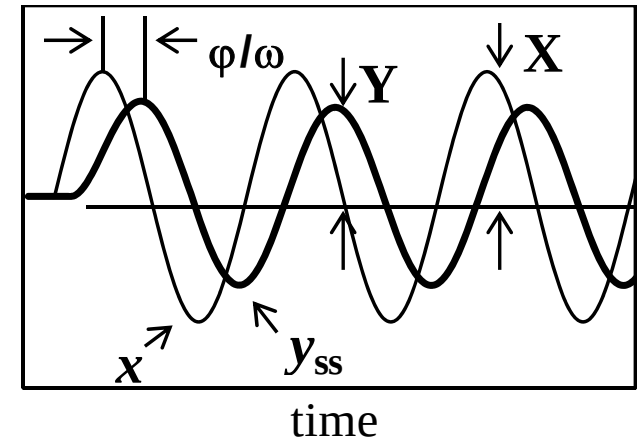
Με βάση το θεώρημα απόκρισης συχνότητας, η έξοδος του **ευσταθούς** συστήματος σε μόνιμη κατάσταση

θα είναι της μορφής: $y_{ss}(t) = Y \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

με $Y = X \cdot |G(j\omega)|$, $\varphi = \arg G(j\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \right]$

όπου φ η διαφορά φάσης εξόδου - εισόδου

Άρα η έξοδος είναι επίσης ημιτονοειδής και τα Y , φ είναι συναρτήσεις του ω .



Ό,τι αφορά την έξοδο εξαρτάται από την **$G(j\omega)$** αν ξέρω την είσοδο.

Έτσι η **$G(j\omega)$** είναι μια πλήρης περιγραφή του συστήματος – εναλλακτικές περιγραφές: διαφορική εξίσωση, συνάρτηση βάρους και συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$.

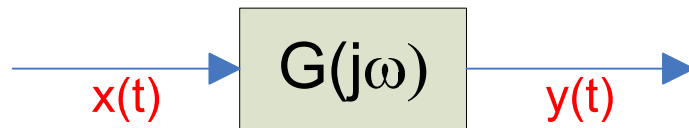
$$\text{Ισχύει: } G(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt = \ell[g(t)] \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = f[g(t)]$$



ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

6

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 12 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος



$$G(j\omega) = [G(s)]_{s=j\omega}$$

Η συνάρτηση $G(j\omega)$ συνεπώς είναι ο μετασχηματισμός Laplace του συστήματος εκτιμώμενος πάνω στον φανταστικό άξονα $s=j\omega$ του πεδίου s .

Η συνάρτηση $G(j\omega)$ καλείται συνάρτηση απόκρισης συχνότητας του συστήματος και είναι μια μιγαδική συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής ω , έχει δηλαδή πεδίο ορισμού τον πραγματικό άξονα $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$. Για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$, η $G(j\omega)$ είναι μιγαδικός αριθμός με μέτρο $|G(j\omega)|$ και όρισμα φ .

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\varphi} = \text{Re}[G(j\omega)] + j \text{Im}[G(j\omega)]$$

Αφού η $G(j\omega)$ είναι μιγαδική συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί σε διανυσματική μορφή κατά τον παραπάνω τύπο σε πολικό διάγραμμα ή διάγραμμα Nyquist.



ΠΟΛΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ – ΟΡΙΣΜΟΣ

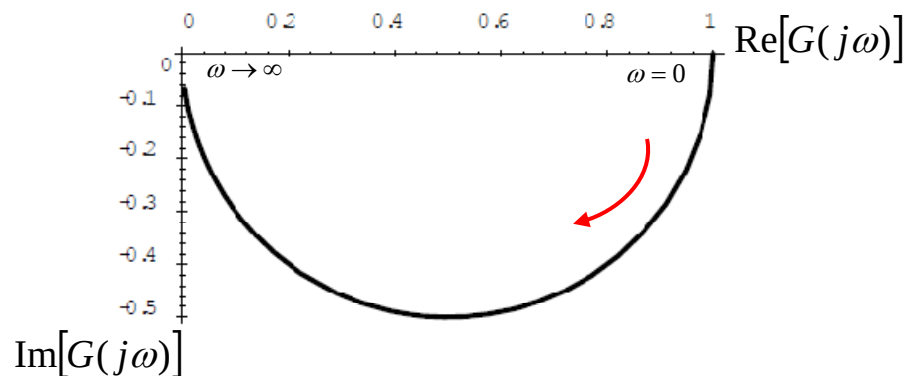
7

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 12 – Δρ. Γιώργος Μαϊστρος

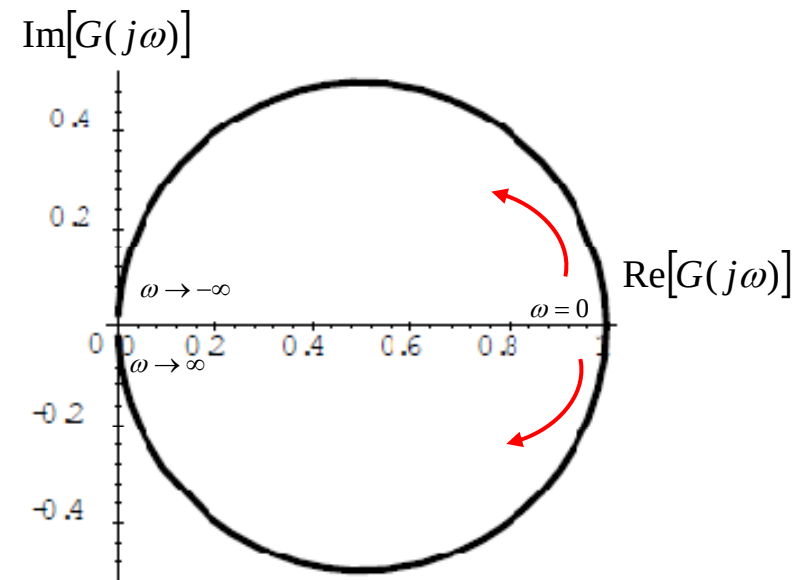
Η γραφική παράσταση της $G(j\omega)$ στο μιγαδικό επίπεδο $G(j\omega)$ όταν η κυκλική συχνότητα ω μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, +\infty)$ ονομάζεται πολικό διάγραμμα της $G(s)$.

Η εικόνα όλου του μιγαδικού άξονα $j\omega$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$ μέσω της $G(j\omega)$ ονομάζεται διάγραμμα Nyquist της $G(s)$.

Πολικό διάγραμμα της $G(s) = \frac{2}{s+2}$



Διάγραμμα Nyquist της $G(s) = \frac{2}{s+2}$



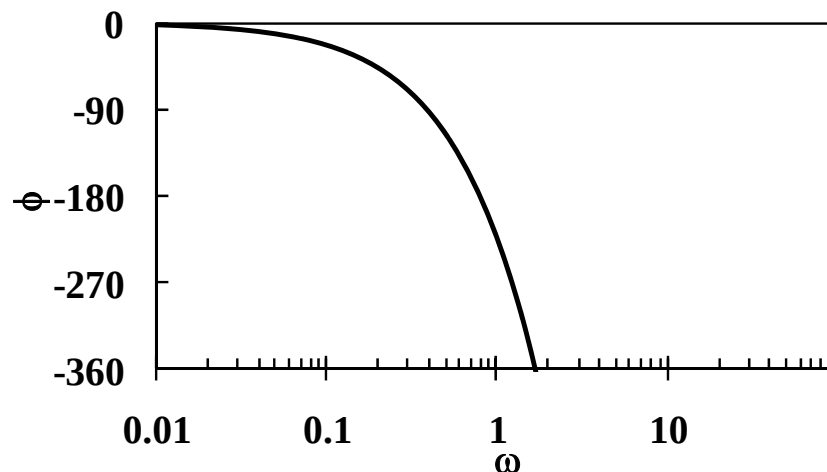
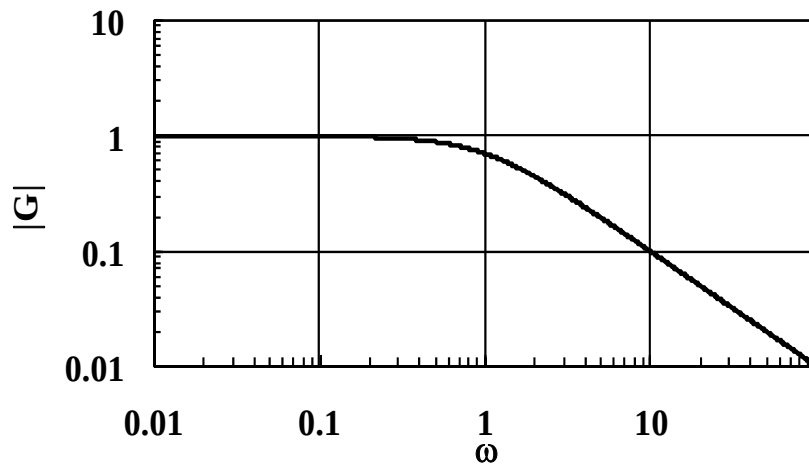


ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ BODE - ΟΡΙΣΜΟΣ

8

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 12 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\varphi}$$



Εναλλακτικά η συνάρτηση απόκρισης συχνότητας $G(j\omega)$ μπορεί να παρασταθεί με διάγραμμα Bode. Αυτό αποτελείται από ένα γράφημα του μέτρου $|G|$ vs. ω σε λογαριθμική κλίμακα κι ένα γράφημα του ορίσματος ή διαφοράς φάσης φ vs. ω σε ημιλογαριθμική κλίμακα. Το μέτρο $|G|$ μπορεί να εκφραστεί και σε μονάδες *decibel*(dB) που ορίζονται ως $|G(j\omega)|_{db} = 20 \cdot \log_{10}|G(j\omega)|$
Συνεπώς για $G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) / G_3(j\omega)$ έχουμε:
$$\begin{cases} |G|_{dB} = |G_1|_{dB} + |G_2|_{dB} - |G_3|_{dB} \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 \end{cases}$$



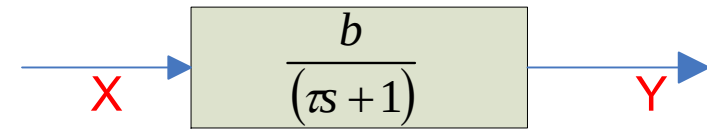
ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

9

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 12 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

Απόκριση συχνότητας συστήματος 1^{ης} τάξης

Η συνάρτηση απόκρισης συχνότητας $G(j\omega)$ του συστήματος θα είναι:



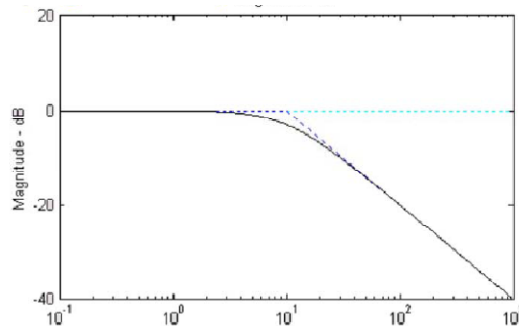
b : στατικό κέρδος, τ : χρονική σταθερά

$$G(j\omega) = \frac{b}{\tau \cdot j\omega + 1} = \frac{b(1 - j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} = \underbrace{\frac{b}{1 + \omega^2\tau^2}}_{\text{Re}[G(j\omega)]} + j \underbrace{\frac{-b\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}}_{\text{Im}[G(j\omega)]}$$

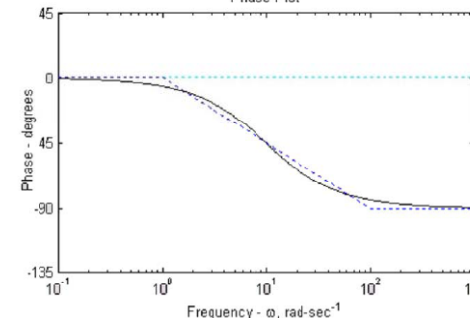
$$\text{Μέτρο } |G(j\omega)| = \sqrt{(\text{Re}[G(j\omega)])^2 + (\text{Im}[G(j\omega)])^2} = \frac{|b| \cdot \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}{1 + \omega^2\tau^2} = \frac{|b|}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad (0 \leq \omega < \infty)$$

$$\text{Όρισμα} \quad \varphi = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \right] = \tan^{-1} \left(-\frac{b\omega\tau}{b} \right) = \tan^{-1}(-\omega\tau) \quad (0 \leq \omega < \infty)$$

Διάγραμμα μέτρου



Διάγραμμα ορίσματος





ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

10

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 12 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

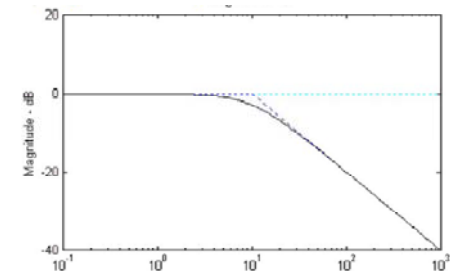
Πληροφορία στα διαγράμματα Bode

Από το παρακάτω διάγραμμα φαίνεται ότι αν διεγείρουμε $x(t) = X \cdot \sin \omega t$ με μικρό ω , τότε παίρνουμε $|G(j\omega)|_{dB} = 0$ και $\varphi=0$, που σημαίνει καμμία μεταβολή στο πλάτος και την φάση της απόκρισης. Ενώ αν διεγείρουμε με μεγάλο ω , παίρνουμε $|G(j\omega)|_{dB} < 0$ και $\varphi \neq 0$, που σημαίνει μικρότερο πλάτος και αλλαγή φάσης. Έτσι το σύστημα δεν αποκρίνεται ή αποκρίνεται πολύ λίγο στις υψηλές συχνότητες (τις φιλτράρει) ενώ αποκρίνεται στις χαμηλές. Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται ότι συμπεριφέρεται σαν βαθυπερατό φίλτρο (low pass filter).

Τιμή του $|G(j\omega)|_{dB}$ αρνητική σημαίνει μικρότερη απόκριση και τιμή του μέτρου ίση με -20 dB σημαίνει πτώση του πλάτους της απόκρισης κατά 10 φορές: $Y=0.1 \cdot X$.

Για μια ανάρτηση θέλουμε οι ταλαντώσεις του οδοστρώματος να μην περνούν στο σασί. Πρέπει να βρούμε για ποιά περιοχή συχνοτήτων της διέγερσης, το μέτρο γίνεται αρνητικό, ώστε να μειώνεται η έξοδος.

Διάγραμμα
μέτρου





ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ - ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ

11

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 12 – Δρ. Γιώργος Μαϊστρος

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Τι κερδίζουμε με το να δουλεύουμε με **απόκριση συχνότητας** ;

Η **συνάρτηση απόκρισης συχνότητας $G(j\omega)$** ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος είναι μια ποσότητα ισοδύναμη με την συνάρτηση μεταφοράς **$G(s)$** . Γι αυτό η **απόκριση συχνότητας** περιγράφει το σύστημα πλήρως, που σημαίνει ότι η γνώση της συνάρτησης $G(j\omega) \forall \omega \in [0, \infty)$ είναι μια αρκετή αναπαράσταση του συστήματος. Συνεπώς υπάρχει μια έμμεση σχέση μεταξύ απόκρισης συχνότητας και μεταβατικής απόκρισης συστήματος (για διάφορες διεγέρσεις). Γι αυτό οι προδιαγραφές μεταβατικής απόκρισης στο σχεδιασμό συστημάτων αντικαθίστανται από ισοδύναμες προδιαγραφές στην απόκριση συχνότητας. Οι τεχνικές απόκρισης συχνότητας πλεονεκτούν και χρησιμοποιούνται γιατί μπορούν να βρεθούν πειραματικά και δίνουν πληροφορία για την ευστάθεια.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΒΟΔΕ ΣΥΝΑΡ.ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

12

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 12 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

Μέτρο και όρισμα βασικών συναρτήσεων μεταφοράς

$G(s)$	$A_R = G(j\omega) $	$\varphi = \arg G(j\omega)$
-1	1	$-\pi$
$K > 0$	K	0
s	ω	$\pi / 2$
$(1+Ts)$	$\sqrt{1+(T\omega)^2}$	$\arctan T\omega$
$1/s$	$1/\omega$	$-\pi / 2$
$1+1/Ts$	$\sqrt{1+1/(T\omega)^2}$	$-\arctan(1/T\omega)$
e^{-Ls}	1	$-L\omega$
$\frac{1}{Ts+1}$	$\frac{1}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}$	$-\arctan T\omega$
$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}}$	$-\arctan \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}, \omega \leq \omega_n$ $-\pi - \arctan \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}, \omega \geq \omega_n$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BODE - ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

13

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 12 – Δρ. Γιώργος Μαϊστρός

Συνάρτηση κέρδους K

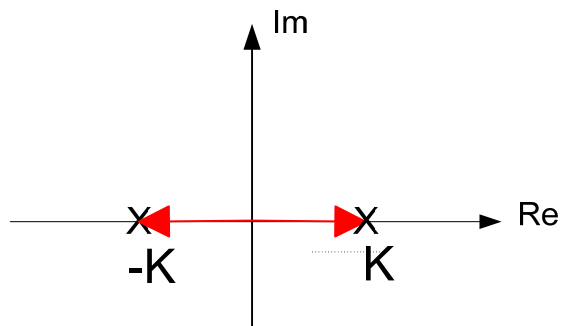
Σε πολική μορφή:

$$G(j\omega) = K = \begin{cases} |K| \cdot e^{j0}, & K > 0 \\ |K| \cdot e^{j\pi}, & K < 0 \end{cases}$$

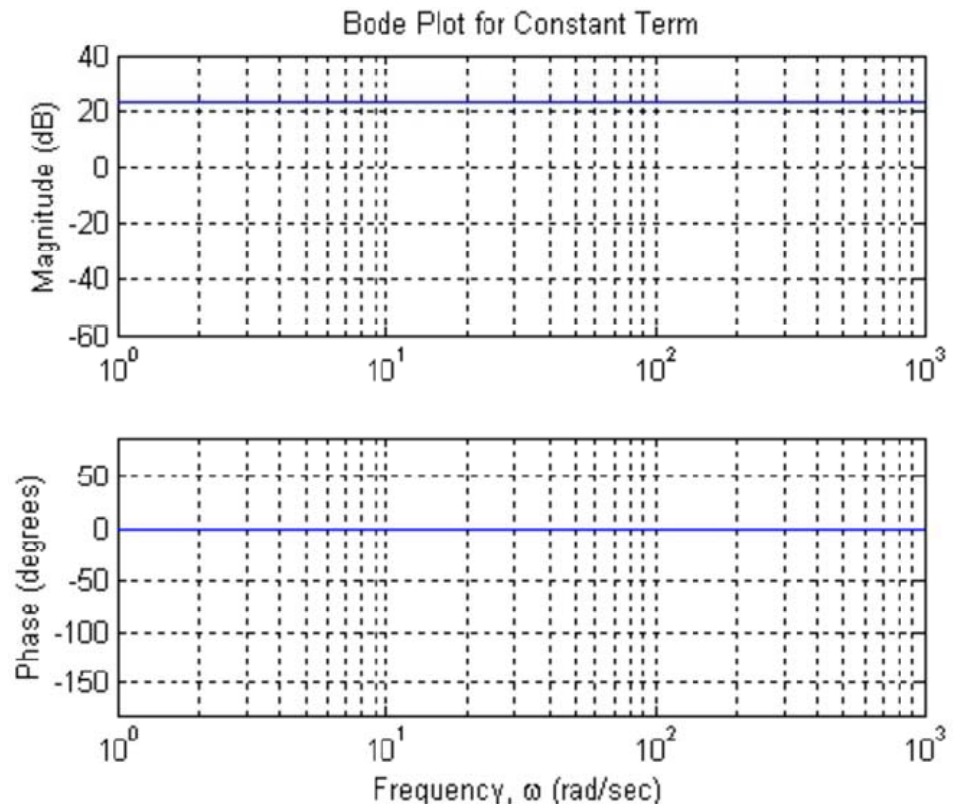
Έτσι το μέτρο:

$$|G(j\omega)| = K \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log|K| \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \begin{cases} > 0, |K| > 1 \\ < 0, |K| < 1 \end{cases}$$

και το όρισμα: $\varphi = \begin{cases} 0, & K > 0 \\ \pi, & K < 0 \end{cases}$



Διαγράμματα





ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BODE - ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

14

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 12 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

Ολοκληρωτής

Αντιστοιχεί σε πόλο στην αρχή:

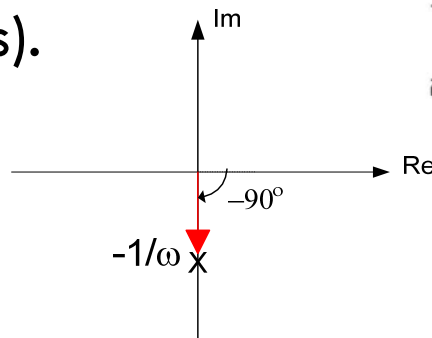
$$G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Έτσι το μέτρο:

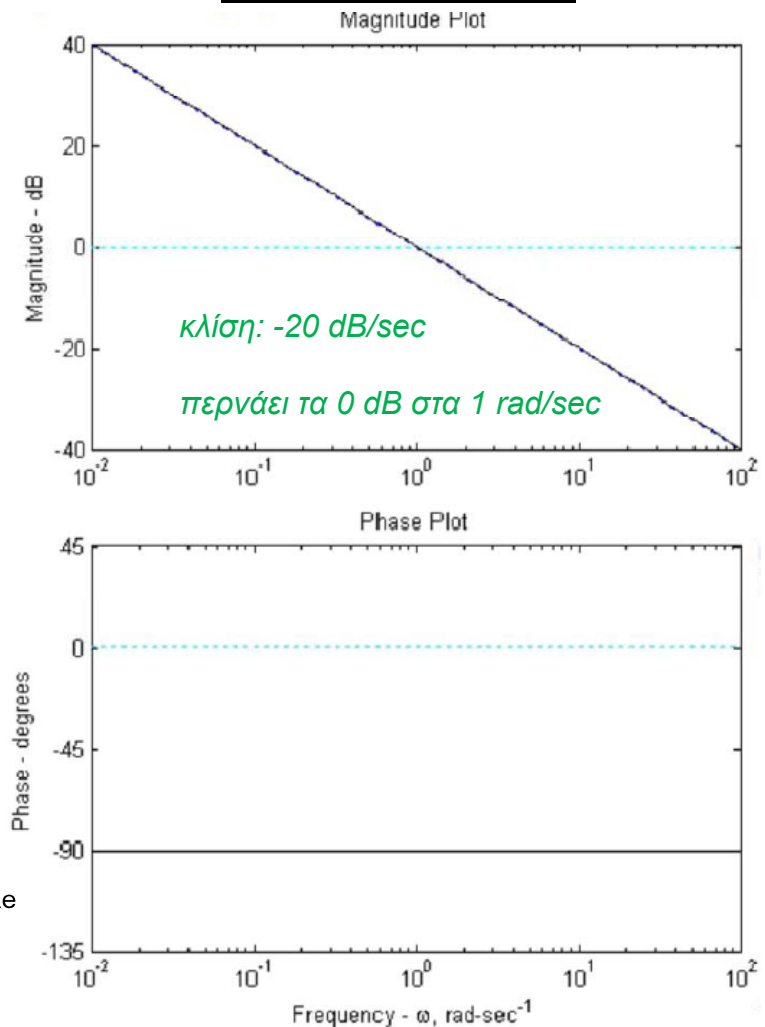
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\omega}\right) = -20 \cdot \log \omega$$

και το όρισμα: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Βλέπουμε ότι ο ολοκληρωτής αφήνει να περνούν οι χαμηλές συχνότητες ενώ κόβει τις υψηλές (low pass).



Διαγράμματα





ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BODE - ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

15

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 12 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

Πολλαπλός ολοκληρωτής

Αντιστοιχεί σε πολλαπλό πόλο:

$$G(s) = \frac{1}{s^n} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^n} = \left(\frac{1}{\omega} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \right)^n = \frac{1}{\omega^n} \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}}$$

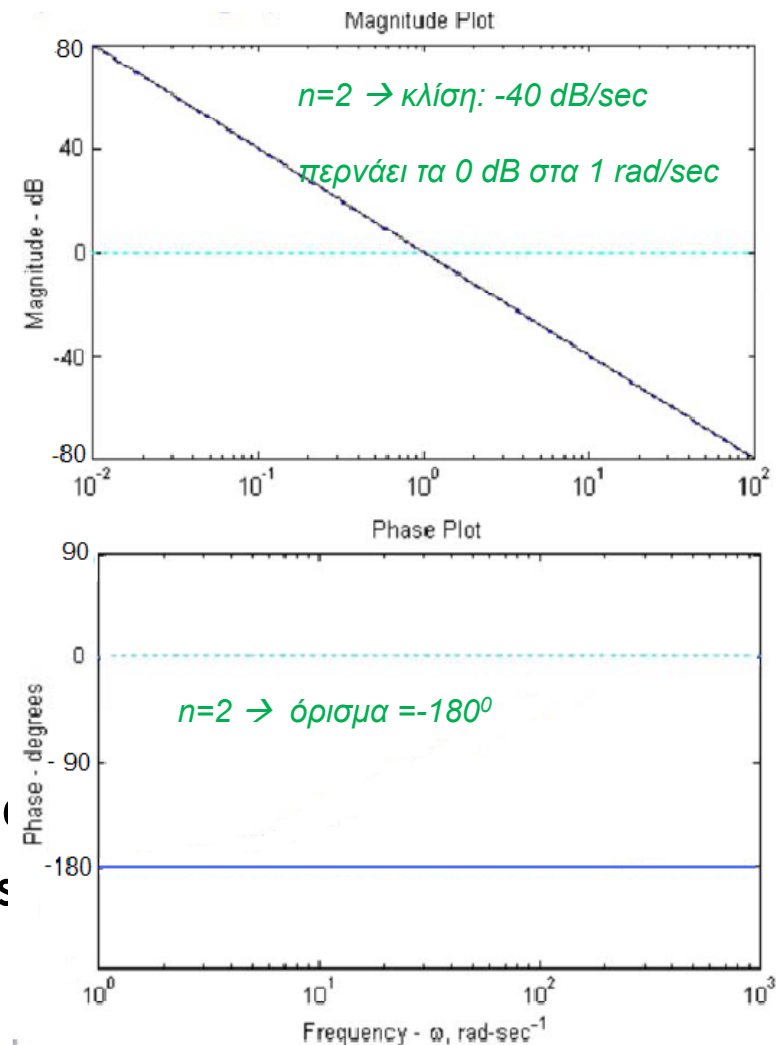
Έτσι το μέτρο:

$$|G(j\omega)| \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\omega^n}\right) = -20 \cdot n \cdot \log \omega$$

και το όρισμα: $\varphi = -n \cdot \frac{\pi}{2}$

Βλέπουμε ότι ο πολλαπλός ολοκληρωτής αφήνει να περνούν οι χαμηλές συχνότητες ενώ κόβει πió έντονα τις υψηλές (low pass)

Διαγράμματα





ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BODE - ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

16

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 12 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

Διαφοριστής

Αντιστοιχεί σε μηδενικό στην αρχή:

$$G(s) = s \Rightarrow G(j\omega) = j\omega = \omega \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Έτσι το μέτρο: $|G(j\omega)| = \omega \Rightarrow |G(j\omega)|_{db} = 20 \cdot \log \omega$
και το όρισμα: $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Όταν μελετούμε μια συνάρτηση αντίστροφη μιας άλλης (π.χ. $s = \left(\frac{1}{s}\right)^{-1}$) το διάγραμμα Bode προκύπτει από το πολλαπλασιασμό της αντίστροφης με -1.

Βλέπουμε ότι η παραγωγή ενισχύει τις υψηλές και κόβει τις χαμηλές συχνότητες (high pass). Τα φυσικά συστήματα είναι low pass.

Διαγράμματα

