

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ  
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ



ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

*ΕΝΟΤΗΤΑ 11:*  
*ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ*  
*ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – Η ΜΕΘΟΔΟΣ*  
*ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΠΟΥ ΡΙΖΩΝ*

Δρ Γιώργος Μαϊστρος, Χημικός Μηχανικός



# ΠΡΟΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

2

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

- Αντικειμενικοί στόχοι & μέθοδοι ανάλυσης ΣΑΕ
- Στόχοι και μέθοδοι σχεδίασης ΣΑΕ
- Μέθοδος του γεωμετρικού τόπου ριζών
- Παραδείγματα κι εφαρμογές



# ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ

3

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιώργος Μαϊστρός

## Επικρατέστεροι αντικειμενικοί στόχοι ανάλυσης ΣΑΕ

Εστιάζονται στον προσδιορισμό των ακόλουθων χαρακτηριστικών:

1. Τον βαθμό ή την έκταση της ευστάθειας του συστήματος
2. Τη συμπεριφορά του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση ισορροπίας
3. Τη συμπεριφορά του συστήματος στη μεταβατική του κατάσταση

Η γενική λύση εξισώσεων περιγραφής συστήματος (ΕΠΣ) χωρίζεται σε 2 τμήματα: (α) απόκριση στη μόνιμη κατάσταση ισορροπίας [τμήμα ΕΠΣ που δεν τείνει στο 0 όταν ο χρόνος  $t \rightarrow \infty$ ] και (β) απόκριση στη μεταβατική κατάσταση [τμήμα ΕΠΣ που τείνει στο 0 όταν ο χρόνος  $t \rightarrow \infty$ ]. Η ανάλυση των ΣΑΕ εστιάζει στην μελέτη των (α) και (β) για την εξέταση της σχετικής ευστάθειας τους.



# ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ

4

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

## Μέθοδοι – γενική μεθοδολογία ανάλυσης γραμμικών ΣΑΕ

1. Προσδιορισμός των εξισώσεων ή της συνάρτησης μεταφοράς για κάθε στοιχείο που αποτελεί το σύστημα
2. Επιλογή του τρόπου παράστασης του συστήματος (λειτουργικό διάγραμμα, διάγραμμα ροής σήματος)
3. Σχηματισμός του μοντέλου του συστήματος με τη βοήθεια καταλλήλων συνδέσεων μεταξύ των στοιχείων που το αποτελούν (μπλοκ ή συνδυασμός κλάδων και κόμβων)
4. Προσδιορισμός των χαρακτηριστικών της απόκρισης του συστήματος

Στο στάδιο 4 μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις συστήματος για λύση στην μόνιμη κατάσταση ισορροπίας και στη μεταβατική κατάσταση. Επίπονη μέθοδος → απλούστερες μέθοδοι βλ. παρακάτω



# ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ

5

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

## Γραφικές μέθοδοι ανάλυσης γραμμικών ΣΑΕ

1. Η μέθοδος του γεωμετρικού τόπου ριζών
2. Η αναπαράσταση συστημάτων μέσω των διαγραμμάτων Bode
3. Τα διαγράμματα Nyquist
4. Οι χάρτες Nichols

Οι 3 τελευταίες μέθοδοι αποτελούν τεχνικές που λαμβάνουν χώρα στο πεδίο συχνότητας βλ. Επόμενη ενότητα

Η μέθοδος γεωμετρικού τόπου ριζών (root locus method) επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό της απόκρισης συστήματος στο πεδίο του χρόνου, ενώ δίνει πληροφορία και για την απόκριση συχνότητας.

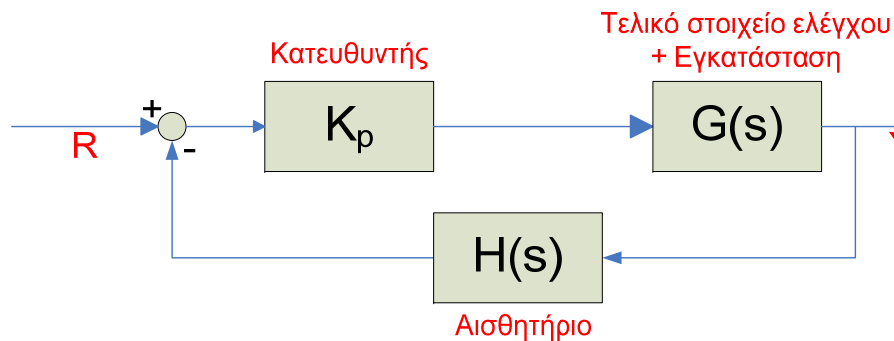


# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ

6

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

## Ορισμός



$$\frac{Y}{R} = \frac{K_p G(s)}{1 + K_p G(s) H(s)}$$

**Τόπος των ριζών** είναι ο γεωμετρικός τόπος στον οποίο ανήκουν οι πόλοι συστήματος κλειστού βρόγχου για τις μεταβολές της τιμής του συντελεστή κέρδους  $K_p$ , όπου  $K_p \in [0, \infty)$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:  $1 + K_p G(s) H(s)$  εξαρτάται από το  $K_p$   
μεταβάλλοντας το  $K_p \rightarrow$  μεταβάλλεται το χαρ. πολυώνυμο  $\rightarrow$   
μετακινούνται οι πόλοι σε συγκεκριμένες τροχιές

Χαρ. εξίσωση:  $1 + K_p G(s) H(s) = 0 \Rightarrow K_p G(s) H(s) = -1 \Rightarrow K_p G(s) H(s) = 1 \angle \pm 180^\circ (2k + 1)$

Διαχωρισμός σε:  $K_p |G(s) H(s)| = 1 \wedge \arg(K_p G(s) H(s)) = \pm 180^\circ (2k + 1) = \arg(G(s) H(s))$   
όπου  $k = 0, 1, 2, \dots$



# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ

7

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιώργος Μαϊστρος

## Συνθήκες

**Η συνθήκη μέτρου:**  $K_p |G(s)H(s)| = 1$  ικανοποιείται πάντα διότι μπορούμε να ρυθμίζουμε κατάλληλα την δεύτερη συνθήκη, την

**συνθήκη γωνίας:**  $\arg(G(s)H(s)) = \pm 180^\circ(2k + 1)$

Η συνθήκη γωνίας ορίζει τις τιμές του  $s$  των ριζών της χαρ. εξίσωσης

Αν ένα σημείο ικανοποιεί την συνθήκη γωνίας, τότε με κατάλληλο  $K_p$  ισχύει και η συνθήκη μέτρου  $\rightarrow$  το σημείο μπορεί να γίνει πόλος

Η παρουσίαση παρακάτω της μεθόδου Evans αποσκοπεί στο να περιγράψει ποσοτικά όλα τα χαρακτηριστικά του τόπου ριζών, ώστε αυτός να μπορεί να σχεδιαστεί. Με βάση την μέθοδο αυτή όλα τα προβλήματα ανάλυσης και σχεδίασης συστημάτων μπορούν να αντιμετωπιστούν, όπου ο γεωμετρικός τόπος ριζών μας δίνει πολύτιμες πληροφορίες.



# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ

8

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

## Εξήγηση

Στην κατασκευή του τόπου ριζών χρειαζόμαστε τη συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού βρόγχου, π.χ.  $G(s)H(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4s+8)(s+5)}$

Θα μπορούσε το  $s_0$  να είναι πόλος; Πρέπει η παράσταση

$s_0(s_0^2+4s_0+8)(s_0+5)$  να έχει μέτρο 1 και γωνία  $\pm 180^\circ(2k+1)$

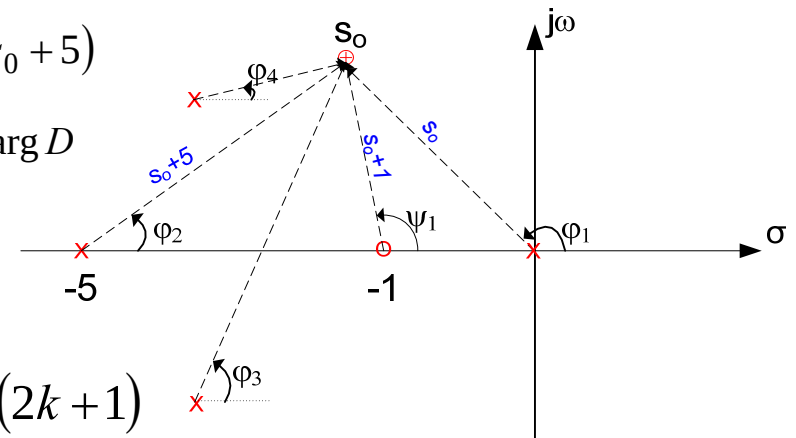
$$\arg(G(s_0)H(s_0)) = \arg(s_0+1) - \arg(s_0) - \arg(s_0^2+4s_0+8) - \arg(s_0+5)$$

$$\text{Γενικά: } \arg\left(\frac{AB}{CD}\right) = \arg(AB) - \arg(CD) = \arg A + \arg B - \arg C - \arg D$$

Σπάμε το  $(s_0^2+4s_0+8)$  και προκύπτουν  
2 μιγαδικές ρίζες

**Συνθήκη γωνίας:**  $\psi_1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 = \pm 180^\circ(2k+1)$

Αν έχω διπλό πόλο έχω 2 ίδιες γωνίες – λαμβάνονται και οι 2 υπόψη





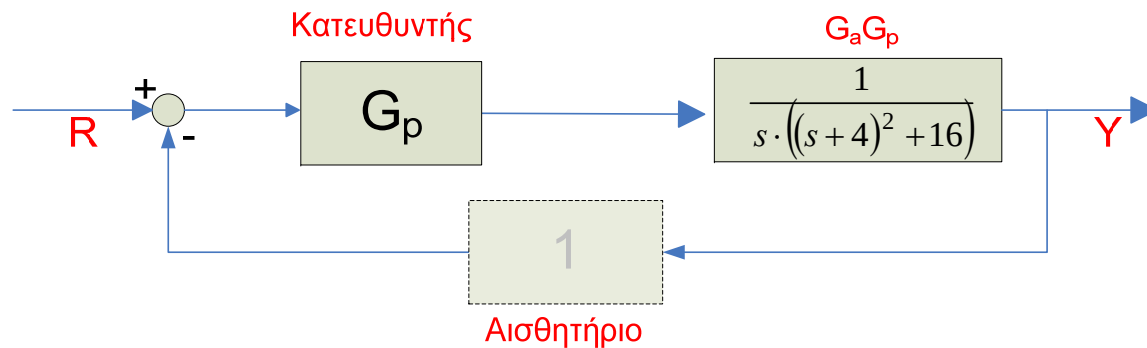


# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ

9

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

## Μέθοδος Evans [1]



**Βήμα α.** Χαρακτηριστική εξίσωση στην μορφή  $1 + K \cdot F(s) = 0$

$$\text{όπου } F(s) = \frac{\beta(s)}{a(s)} = \frac{s^m + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}, \quad n \geq m$$

Πρέπει οι συντελεστές του  $s^m$  και  $s^n$  να είναι μοναδα (1). Αν δεν είναι τους κάνουμε και ο συντελεστής με τον οποίο έχουμε πολ/σιάσει ενσωματώνεται στο K. Η  $F(s)$  δεν είναι γενικά η συνάρτηση μεταφοράς της εγκατάστασης.

$$\text{Έχουμε εδώ: } 1 + KF(s) = 1 + KG_a G_p = 1 + K \frac{1}{s[(s+4)^2 + 16]} = 0$$



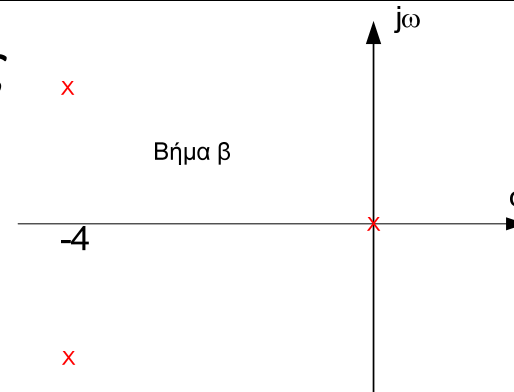
# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ

10

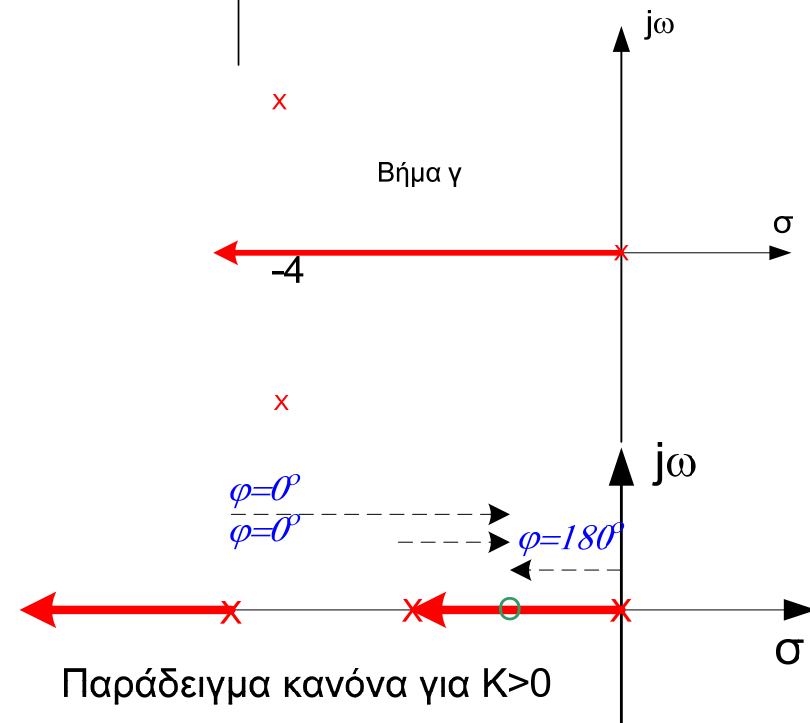
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιώργος Μαϊστρός

## Μέθοδος Evans [2] – πόλοι/μηδενικά και τόπος στον άξονα $\sigma$

**Βήμα β.** Σημειώνουμε τους πόλους και τα μηδενικά της  $F(s)$



**Βήμα γ.** Σημειώνουμε τον τόπο στον πραγματικό άξονα (άξονα  $\sigma$ ). Αυτό εξαρτάται από το πρόσημο του  $K$  και ισχύει: Αν  $K > 0$ , όλα τα σημεία στον άξονα  $\sigma$  που βρίσκονται αριστερά από περιττό αριθμό πόλων και μηδενικών ανήκουν στον τόπο των ριζών. Αν  $K < 0$ , τότε ο παραπάνω κανόνας ισχύει για άρτιο αριθμό πόλων και μηδενικών.





# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ

11

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

## Ορισμοί

Το πλήθος των τμημάτων, δηλαδή ο **αριθμός των κλάδων** του γεωμετρικού τόπου ριζών, ισούται με το μέγιστο του πλήθος των πόλων ή των μηδενικών της  $F(s)$ , δηλαδή  $\max[n, m]$ .

Όταν ο αριθμός των πόλων ( $n$ ) είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό μηδενικών ( $m$ ), τότε θα υπάρχουν τόσοι κλάδοι που καταλήγουν στο άπειρο όση είναι η διαφορά  $n-m$ . Αυτοί οι κλάδοι γίνονται **ασύμπτωτες ευθείες**, που τέμνουν τον άξονα  $\sigma$  στο σημείο  $a$ , που είναι το κέντρο βάρους των ριζών:

$$a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}$$

όπου  $p_i$  οι πόλοι και  $z_i$  τα μηδενικά της  $F(s)$ .

Η γωνία ( $\Phi_e$ ) που σχηματίζουν με τον άξονα  $\sigma$  είναι:  $\Phi_e = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{n-m}$

όπου  $k = 0, 1, 2, \dots, n-m-1$



# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ

12

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

## Μέθοδος Evans [3] – υπολογισμός ασυμπτώτων

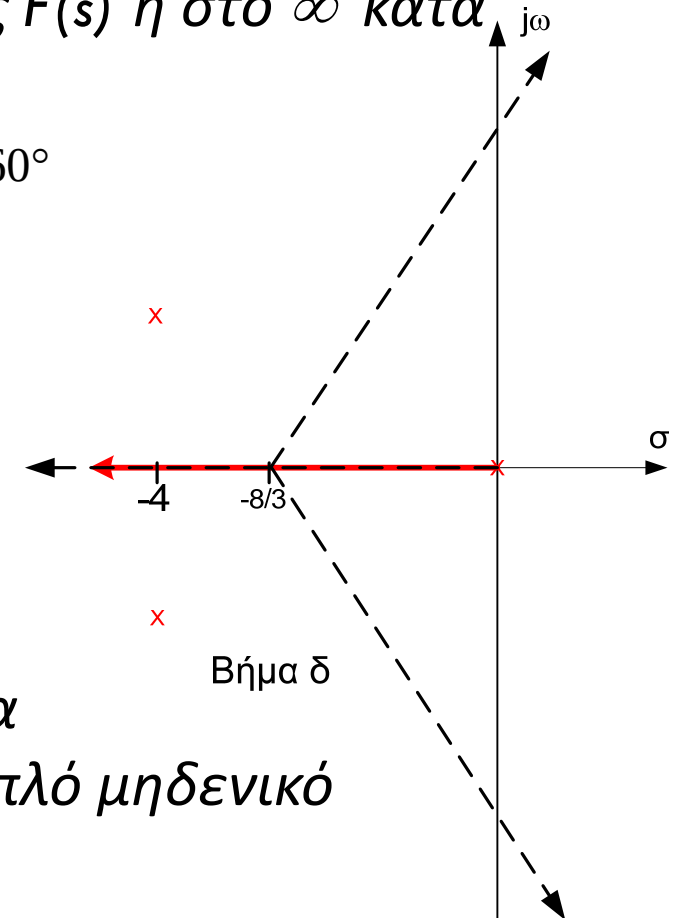
**Βήμα δ.** Κάθε κλάδος του τόπου ριζών ξεκινά από πόλο της  $F(s)$  [για  $K=0$ ] και καταλήγει [για  $K \rightarrow \infty$ ] σε μηδενικό της  $F(s)$  ή στο  $\infty$  κατά μήκος **ασυμπτώτων**.

$$n - m = 3 \quad a = \frac{-4 - 4 + 0}{3 - 0} = -\frac{8}{3} \quad \Phi_{e,1} = \frac{180^\circ(2 \cdot 0 + 1)}{3 - 0} = 60^\circ$$

$$\Phi_{e,2} = \frac{180^\circ(2 \cdot 1 + 1)}{3 - 0} = 180^\circ \quad \Phi_{e,3} = \frac{180^\circ(2 \cdot 2 + 1)}{3 - 0} = 300^\circ$$

Για  $K=0$  ο πόλος κλειστού βρόγχου ταυτίζεται με αυτόν της  $F(s)$  ενώ για  $K \rightarrow \infty$  ταυτίζεται με το μηδενικό της  $F(s)$ .

**Παρατήρηση:** Αν ο πόλος στο 0 ήταν διπλός, θα ξεκινούσαν από αυτόν 2 κλάδοι. Αν έχουμε διπλό μηδενικό θα καταλήξουν εκεί δύο πόλοι.





# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ

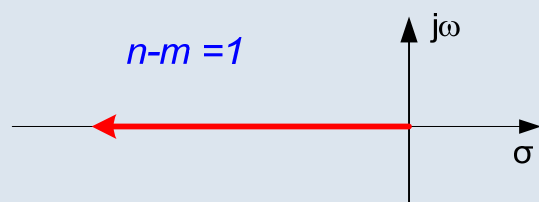
13

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιώργος Μαϊστρος

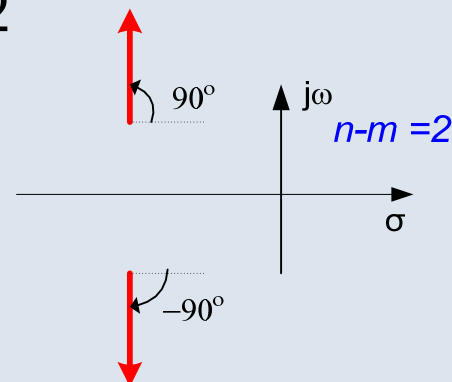
## Ασύμπτωτες ευθείες στον γεωμετρικό τόπο ριζών

Ο αριθμός των ασυμπτώτων στον γεωμετρικό τόπο ριζών είναι  $n - m$

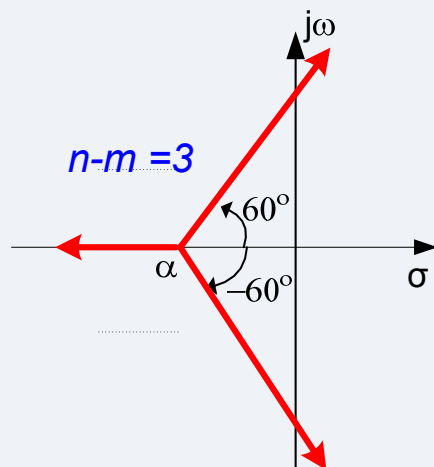
$$n - m = 1$$



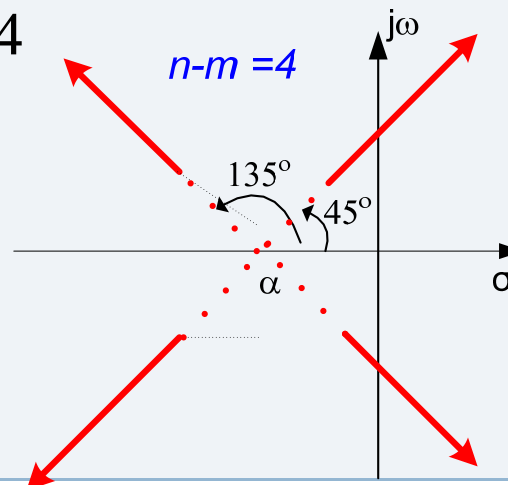
$$n - m = 2$$



$$n - m = 3$$



$$n - m = 4$$





# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ

14

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

## Μέθοδος Evans [4] – γωνία άφιξης και αναχώρησης

**Βήμα ε.** Οι κλάδοι του τόπου των ριζών είναι συμμετρικοί ως προς τον άξονα σ διότι όλες οι μιγαδικές ρίζες εμφανίζονται ως ζεύγη συζυγών.

Η συνθήκη γωνίας μπορεί να χρησιμεύσει για τον υπολογισμό της **γωνίας αναχώρησης** από ένα μιγαδικό πόλο ή της **γωνίας άφιξης** σε ένα μιγαδικό μηδενικό.

Έστω σημείο  $s_0$  που ανήκει στον τόπο και είναι πολύ κοντά στον πόλο. Σύμφωνα με την συνθήκη γωνίας στο  $s_0$  έχουμε:  $-\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 = \pm 180(2k + 1)$

Αν  $s_0$  τείνει στον πόλο:

$$\varphi_1 = 90^\circ \wedge \varphi_3 = 135^\circ \Rightarrow -90^\circ + 135^\circ - \varphi_2 = \pm 180(2k + 1) = 180^\circ \Rightarrow \varphi_2 = -45^\circ$$



# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ

15

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

Μέθοδος Evans [5] – τομή με φανταστικό άξονα ( $j\omega$ )

**Βήμα στ.** Υπολογισμός της τιμής του  $K$  στο σημείο που ο κλάδος τέμνει τον άξονα  $j\omega$ .

Χαρακτ. πολυώνυμο:  $1 + K \frac{1}{s[(s+4)^2 + 16]} = 0 \Rightarrow s^3 + 8s^2 + 32s + K = 0$

Πίνακας Routh για υπολογισμό  $K$  όπου έχω πόλο στον άξονα  $j\omega$ :

|       |                            |     |                                                                                                                                |
|-------|----------------------------|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $s^3$ | 1                          | 32  | Για ευστάθεια πρέπει:<br><br>$K > 0$ ισχύει<br><br>$\frac{8 \cdot 32 - K}{8} > 0 \Rightarrow K < 256$<br><br>οπότε $K^* = 256$ |
| $s^2$ | 8                          | $K$ |                                                                                                                                |
| $s^1$ | $\frac{8 \cdot 32 - K}{8}$ |     |                                                                                                                                |
| $s^0$ | 8                          |     |                                                                                                                                |
|       | $K$                        |     |                                                                                                                                |

Για  $K=K^*$  η χαρακτ. εξίσωση:  $s^3 + 8s^2 + 32s + K^* = 0 \Rightarrow s^3 + 8s^2 + 32s + 256 = 0$

Θέλω τους πόλους πάνω στον άξονα  $j\omega$ , δηλ.  $s=j\omega$ . Έτσι:

$$\begin{cases} -8\omega^2 + 256 = 0 \\ \omega^3 + 32\omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8(\omega^2 - 32) = 0 \\ -\omega(\omega^2 - 32) = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega^2 - 32 = 0 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{32}$$



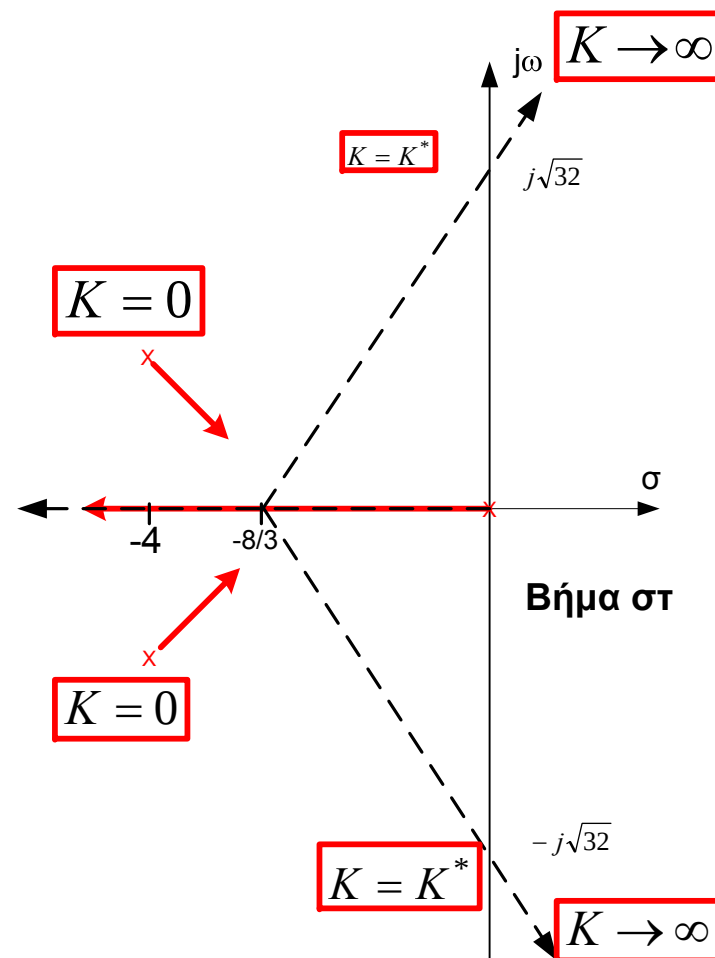
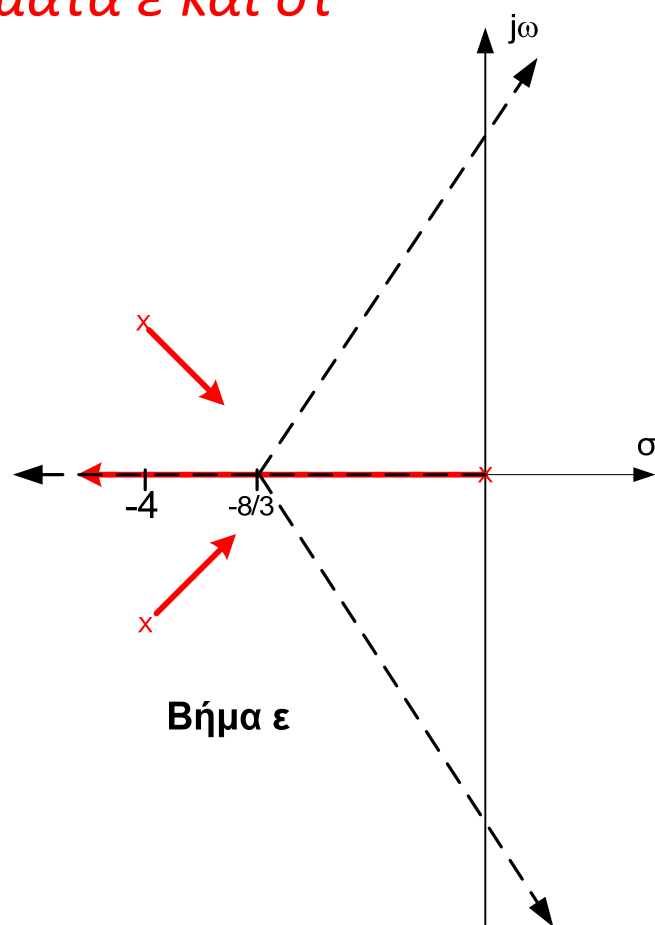
# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ

16

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιώργος Μαϊστρος

## Μέθοδος Evans [6] – εφαρμογή στο παράδειγμα

*Βήματα ε και στ*







# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ

17

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

## Μέθοδος Evans [7] – σημεία θλάσης

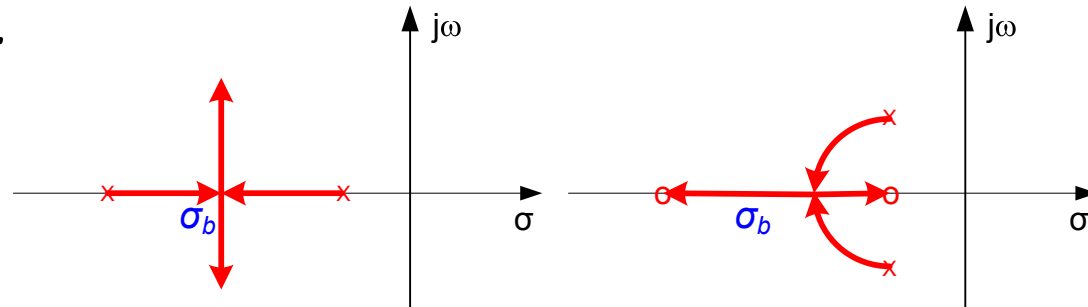
**Βήμα ζ.** Σημείο θλάσης είναι ένα σημείο πάνω στον άξονα  $\sigma$  όπου καταφθάνουν ή αναχωρούν δύο ή περισσότεροι κλάδοι του τόπου ριζών. Το σημείο θλάσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(\sigma_b - p_i)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{(\sigma_b - z_i)} \quad \text{όπου } p_i \text{ και } z_i \text{ είναι οι πόλοι και τα μηδενικά της συνάρτησης } F(s)$$

Η άνω εξίσωση μπορεί να λύνεται δύσκολα. Για ευκολία μπορούμε να θέσουμε:  $\frac{d}{ds} F(s) = 0$

Η συνθήκη αυτή δεν είναι ικανή είναι όμως αναγκαία (δίνει δηλαδή πιθανο σημείο θλάσης).

Παραδείγματα  
σημείων θλάσης



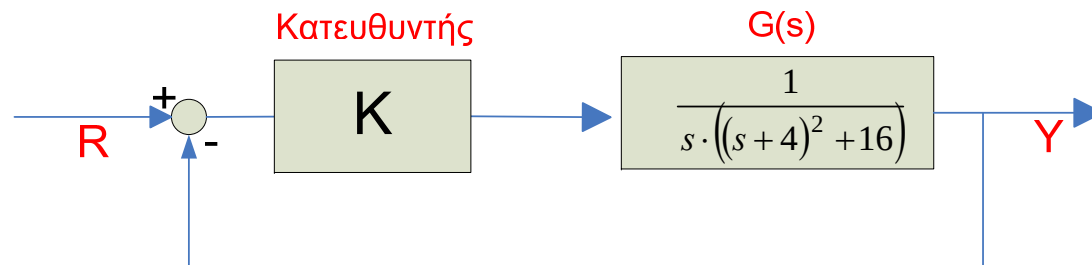


# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ

18

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

## Παράδειγμα 1 [1]



Αναλογικός κατευθυντής P

Ποιά  $K_p$  ικανοποιούν:

(i)  $\tau \leq 0.5 \text{ sec}$

**Λύση.**

(ii)  $e_{ss}$  ελάχιστο για  $r(t)=t$  τύπου 1

Προδιαγραφή (ii)  $E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} R(s) = \frac{s[(s+4)^2 + 16]}{s[(s+4)^2 + 16] + K} R(s)$

Επιλέγω:  $R(s) = \frac{1}{s^2}$  κι έχω  $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} (sE(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \frac{s[(s+4)^2 + 16]}{s[(s+4)^2 + 16] + K} \cdot \frac{1}{s^2} \right) = \frac{32}{K}$

Το  $K$  δεν μπορούμε να το αυξάνουμε επ' άπειρο για να μειώσουμε  $e_{ss}$  διότι αν δεν έχουμε ευστάθεια δεν ισχύει το θεώρημα τελικής τιμής.

Ελέγχω ευστάθεια  $\rightarrow$  κριτήριο Routh  $\rightarrow 0 < K < 256$

Έτσι το ελάχιστο δυνατό σφάλμα που μπορώ να έχω είναι  $e_{ss}^{\min} = \frac{32}{256} = \frac{1}{8}$

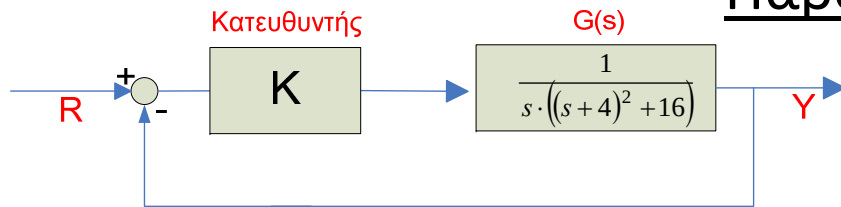


# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ

19

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

## Παράδειγμα 1 [2]



Πρέπει όμως να καλύψουμε και την προδιαγραφή (i)

Θέλουμε:  $\tau \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\tau} \geq 2 \Rightarrow -\frac{1}{\tau} \leq -2 \Rightarrow \text{Re}[p] \leq -2$

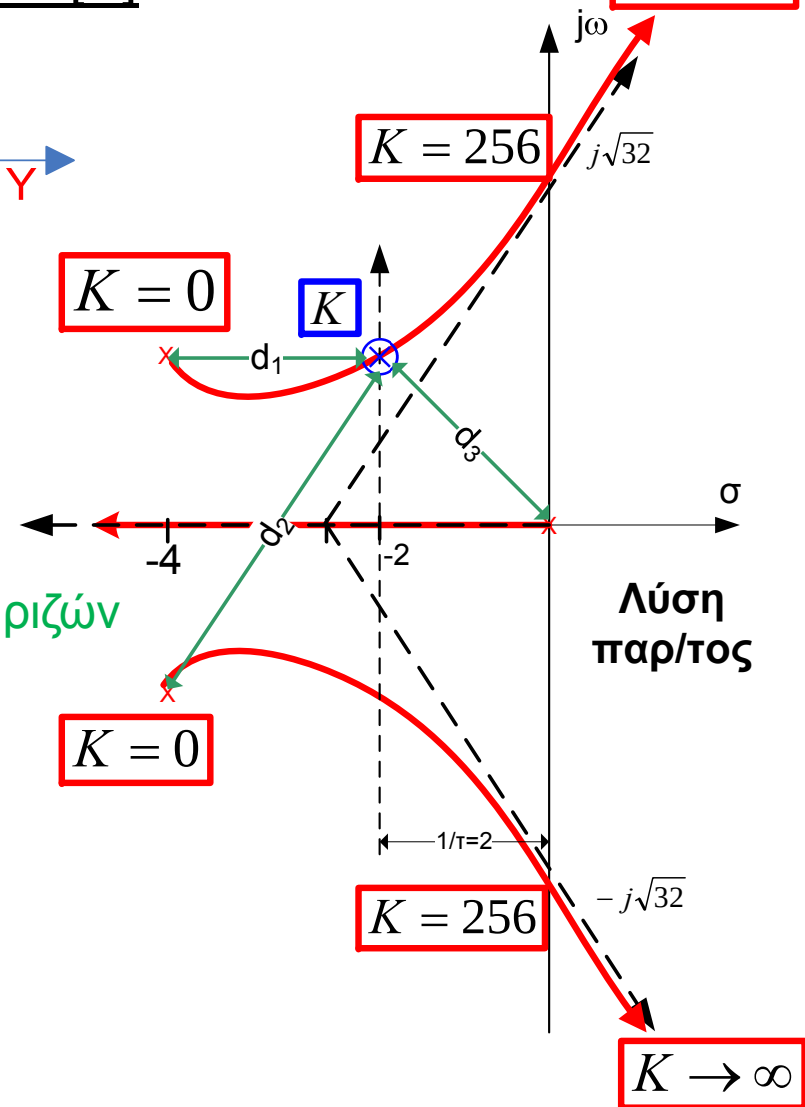
Θέλουμε από προδ. (ii) το  $K \uparrow$  και από (i) να μην ξεπερνούμε τον διακεκομμένο άξονα  $\rightarrow$  επιλέγουμε το σημείο τομής του τόπου με τον διακ. Άξονα. Ισχύει για το  $K$  που ζητάμε:  $K = d_1 d_2 d_3$ , οπότε  $K \approx 65$ .

Βλ. Σχήμα στην επόμενη σελίδα. Έτσι επιλέγουμε:  $K=65$

Πρέπει να ελεγχθεί ο τρίτος πόλος για  $K=65$ . Υπολογίζουμε το  $K$  που θέτει τον τρίτο πόλο στο  $-2$ . Αν η τιμή αυτή είναι μικρότερη του  $65$ , τότε για  $K=65$  είμαστε αριστερά του  $-2$ . Αν η τιμή αυτή είναι μικρότερη του  $65$ , τότε για  $K=65$  ελιμαστέ δεξιά του  $-2$  και το πρόβλημα δεν έχει λύση (ασυμβατότητα προδιαγραφών). Τότε πρέπει να αλλάξω κατευθυντή  $\rightarrow$  PD που απομακρύνει τους πόλους από τον φανταστικό άξονα.



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιώργος Μαϊστρός

$$K \rightarrow \infty$$


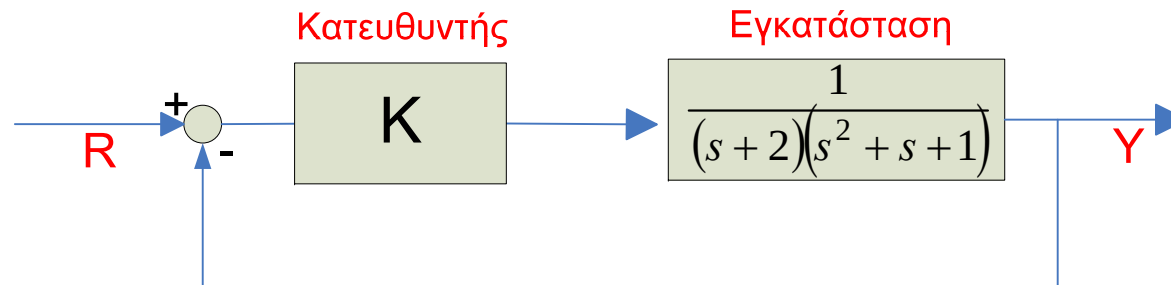


# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

21

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιώργος Μαϊστρος

## Παράδειγμα 2 [1]



### Α. Αναλογικός κατευθυντής P.

Χαρακτηριστική εξίσωση:

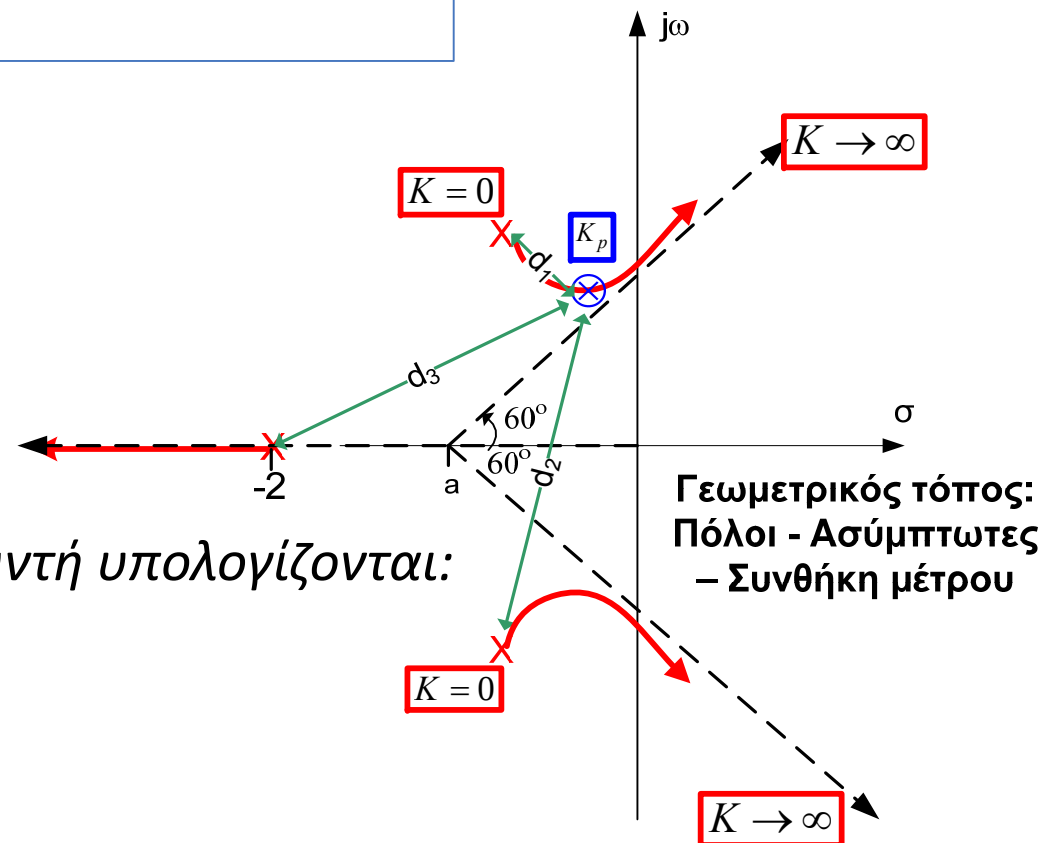
$$1 + K_p F(s) = 1 + K_p \frac{1}{(s+2)(s^2+s+1)} = 0$$

Θα έχουμε 3 ασύμπτωτες, διότι

$$n = 3 \wedge m = 0 \Rightarrow n - m = 3$$

Τα κέρδη του αναλογικού κατευθυντή υπολογίζονται:

$$K_p = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3$$



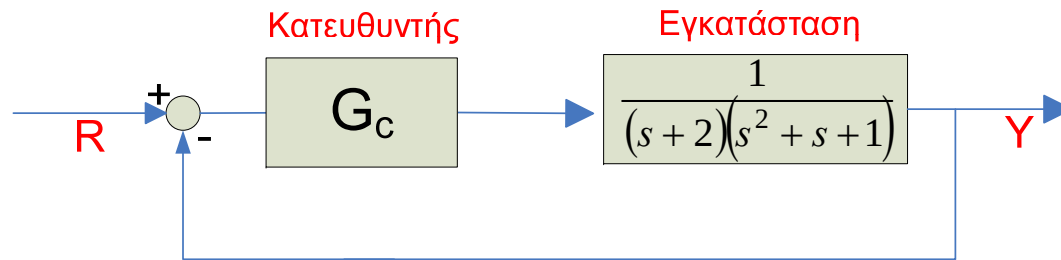


# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

22

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

## Παράδειγμα 2 [2]



$$G_c(s) = K_p + K_D s = K_p [1 + T_D s]$$

Που πρέπει να βάλω το μηδενικό ώστε το επιθυμητό σημείο να είναι μέρος του τόπου των ριζών;

### B. Κατευθυντής PD.

Μπορώ να τοποθετήσω το μηδενικό  $s = -\frac{1}{T_D}$  όπου θέλω, ταυτόχρονα μπορώ να ρυθμίσω το  $K_p$  (2 βαθμοί ελευθερίας)

Χαρ. εξίσωση:  $1 + K_p F(s) = 1 + K_p \frac{1 + T_D s}{(s+2)(s^2+s+1)} = 0$

Συνθήκη γωνίας:  $-\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \psi = \pm 180^\circ(2k+1) \Rightarrow \psi = \dots \rightarrow$

Η χαρ. εξίσωση πρέπει να έρθει στη μορφή:  $1 + K_p T_D \frac{T_D^{-1} + s}{(s+2)(s^2+s+1)} = 0$

Υπολογίζω:  $\frac{K_p}{T_D} = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot d_3}{\delta}$  κι έχω  $n = 3 \wedge m = 1 \Rightarrow n - m = 2$ , δηλ. 2 ασύμπτωτες

Το μηδενικό που εισήχθη έλκει τους πόλους κοντά του, έτσι καταφερνουμε να αυξήσουμε την ευστάθεια του συστήματος

βρίσκω το σημείο του μηδενικού

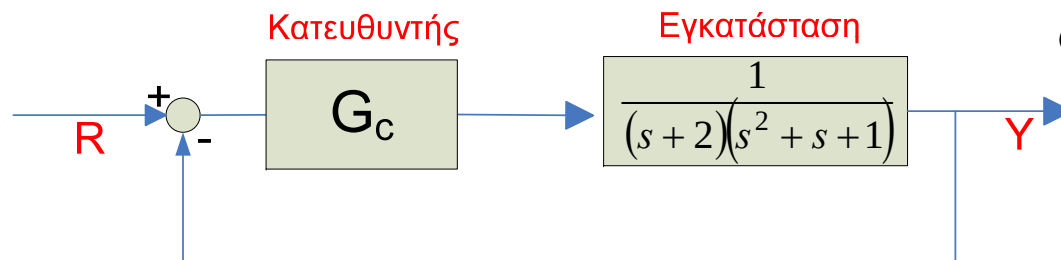


# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

23

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιώργος Μαϊστρός

## Παράδειγμα 2 [3]



$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = K_p \frac{s + \frac{K_I}{K_p}}{s} = K_p \frac{s + z}{s}$$

Που πρέπει να βάλω το μηδενικό ώστε το επιθυμητό σημείο να είναι μέρος του τόπου των ριζών;

### B. Κατευθυντής PI.

Ο κατευθ. Ι χρησιμοποιείται για να βελτιώσει το σφάλμα μόνιμης κατάστασης (αυξάνει τον τύπο του συστήματος)

Χαρ. εξίσωση:  $1 + K_p F(s) = 1 + K_p \frac{s + z}{s(s+2)(s^2+s+1)} = 0$

Συνθήκη γωνίας:  $\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 + \psi = \pm 180^\circ(2k+1) \Rightarrow \psi = \dots \rightarrow$  βρίσκω το σημείο του μηδενικού

Η χαρ. εξίσωση πρέπει να έρθει στη μορφή:  $1 + K_p T_D \frac{T_D^{-1} + s}{(s+2)(s^2+s+1)} = 0$

Υπολογίζω:  $\frac{K_p}{T_D} = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4}{\delta}$  κι έχω  $n = 4 \wedge m = 1 \Rightarrow n - m = 3$ , δηλ. 3 ασύμπτωτες

Η διαφορά μεταξύ PD και PI είναι ο πόλος του PI στο μηδέν

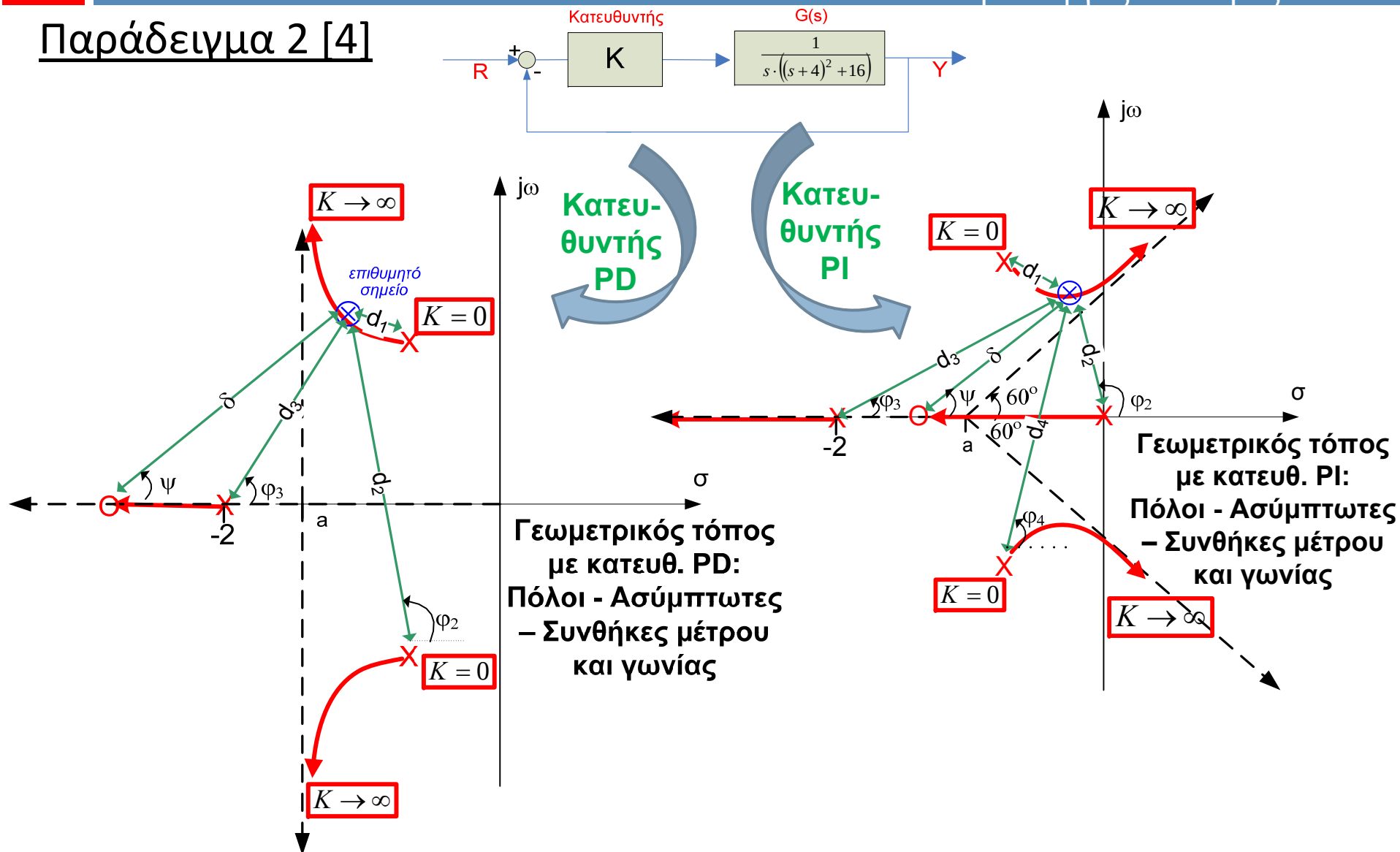


# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

24

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιώργος Μαϊστρος

## Παράδειγμα 2 [4]





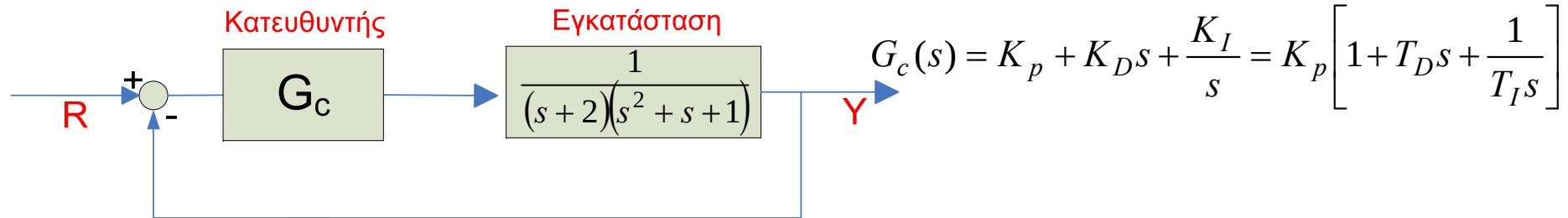


# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

25

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

## Παράδειγμα 2 [5]



### Β. Κατευθυντής PID.

$$G_c(s) = K_p \left[ \frac{T_I s + T_D T_I s^2 + 1}{T_I s} \right] = K_p T_D \frac{s^2 + T_D^{-1} s + T_D^{-1} T_I^{-1}}{s} = K_p T_D \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{s}$$

Ο κατευθ. PID μας δίνει ένα μηδενικό παραπάνω από τον κατευθυντή PI. Ο PID χρησιμοποιείται για να βελτιώσει και την ευστάθεια και τα σφάλματα μόνιμης κατάστασης έναντι του PD και του PI.

Χαρ. εξίσωση:  $1 + K_p T_D F(s) = 1 + K_p T_D \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{s(s + 2)(s^2 + s + 1)} = 0$

Έχω:  $n = 4 \wedge m = 2 \Rightarrow n - m = 2$ , δηλ. 2 ασύμπτωτες

Η εισαγωγή ενός ακόμα μηδενικού έχει τραβήξει τους πόλους προς τα αριστερά  $\rightarrow$  έχει αυξήσει την ευστάθεια



# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

26

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – ΕΝΟΤΗΤΑ 11 – Δρ. Γιωργος Μαϊστρος

## Παράδειγμα 2 [6]

